序　言

数列中有许多问题．求数列的通项、和，等等，已有不少人注意到，但能跳出"庐山之中"从更高的观点来看待这些问题的书还不多见．这本《有趣的差分方程》就是这样的书．

李氏昆仲，既有从事科学研究的体会，又有教学工作的经验，所以这本《有趣的差分方程》既有相当深度，又是通俗易懂的读物．

当然，读数学书总得花点力气．特别是内容丰富的书．这本书中，不仅有很多有趣的中学问题与较难的数学竞赛题，而且有差分算子，常系数差分方程，常差分方程，偏差分方程，牛顿公式，纤维丛，……读此书当然不会太轻松的．怎么办？硬着头皮读下去，读完了，自然苦尽甘来，不仅学到了知识、技巧，而且也就学会了读书．如果一遇到困难就退缩，那只能看"白开水"或"低幼读物"，逐渐成熟起来的读者是不会采取这种态度的．

李氏昆仲，是我的良师益友，读了他们的手稿，很受启发，特向爱好数学的同志们推荐，相信每一位读者都会从这本书中学到一些有用的东西．

单　墫

一九九一年二月

目　录

一、从斐波那契数列谈起

中世纪的意大利，曾有过一个商业蓬勃发展的时期．有一位和马可·波罗几乎同时代的著名数学家，名叫里昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，约1170—1250)．他曾以一个商人的身份去东方旅行，途中搜集了许多算术与代数方面的素材．在1202年，写出了一本书叫《算盘书》(Liber Abaci)．在这本书中，有一个兔子繁殖问题很能给人以启迪．直到现在，人们还常常引用它．问题是这样的：

如果一对大兔每个月繁殖一对小兔，而小兔一个月后长成大兔（即到第二个月便能繁殖）．在没有兔子死亡的情况下，一对小兔在一年中繁殖成多少对兔？

现在，让我们借用这个问题打开一扇数学之门，这就是本书的主题——差分方程．

先来着手分析和解决这个兔子繁殖问题．

我们将第1个月，第2个月，…，第n个月的兔子对数分别记作F_1, F_2, …, F_n，然后注意这些数之间的联系．在第n个月的F_n对兔子中，有F_{n-1}对在第$n-1$个月就已经存在了，因而在第n个月已长成大兔；而其余的都是小兔．在第$n+1$个月，这F_{n-1}对大兔都要繁殖，于是第$n+1$个月就比第n个月增加了F_{n-1}对兔．这样我们就有

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, \qquad (1.1)$$

这是一个连续三个月的兔子对数之间满足的关系式．我们又注意到，第1个月和第2个月都只有一对兔，也就是说$F_1=$

1, $F_2=1$. 由(1.1)我们就可以推算出以后逐月的兔子对数，它们分别是 $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$, $F_9=34$, $F_{10}=55$, $F_{11}=89$, $F_{12}=144$. 可见一年中繁殖成了144对兔.

学过高中代数的读者立即会想到，数列的递推形式不就是这样的吗？确实，它也正是我们了解差分方程的起点.

现在我们丢开兔子繁殖这个实际问题，只注意(1.1)和

$$F_1=F_2=1, \tag{1.2}$$

这样便得到一个数列$\{F_n\}$，它被人们称作斐波那契数列. 对它的任一项 F_n，都可以像上面求 F_{12} 那样，通过逐步推算求出. 尽管如此，我们仍有理由感到不满足. 因为对一个数列，我们常常特别重视它的通项公式. 有了通项公式不仅可以直接算出任意一项，还有利于研究数列的各种性质. 那么，数列$\{F_n\}$有没有通项公式呢？如果你试着按公式

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{1.3}$$

写出一个数列，就会看到写出的各项与斐波那契数列的各项完全相同. 事实上，我们可以用数学归纳法来证明这一点*. 过程如下：

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=1=F_1,\\&\qquad \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=1=F_2,\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

所以当 $n=1$ 和 $n=2$ 时结论成立.

(2) 假设结论对 $n=k-1$ 和 $n=k-2$ 都成立($k>2$)，则

---

* 这里所用的是稍有变化的数学归纳法. 不了解这种方法的读者可以参阅关于数学归纳法的小丛书，例如参考文献[1].

有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right. \\
&\qquad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\right] \\
&=F_{k-1}+F_{k-2}=F_{k},
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

所以结论对于 $n=k$ 也成立.

因此，对任意自然数 n 都有

$$
F_{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]. \tag{1.6}
$$

换句话说，(1.6)正是我们所希望找到的 $\{F_n\}$ 的通项公式.

读者若把(1.1)和(1.6)作一个比较，可能会留下一串疑问. 例如，(1.1)是一个只有加法运算的表达式，为什么(1.6)会出现指数运算呢？能不能找到一个不含指数运算的通项公式呢？还有，由(1.1)和(1.2)出发逐项计算，显然所得的每个 F_n 都应当是正整数，可是为什么这些整数却要用 $\sqrt{5}$ 这个无理数来表示呢？（如果你试图消去这个无理数，还会徒劳一场！）而我们更应该关心的，是表达式(1.6)到底是怎样得来的. 其实，这个问题一解决，前面那些疑问也就不难解释了. 这些问题将在本书第三节中加以解决.

从数列的角度看，(1.1)和(1.6)是同一个数列所满足的

两个式子. 其中(1.6)式是我们熟悉的解析表达式，而(1.1)则通常称为一个"差分方程"，它表达数列的相邻几项之间的关系.

谈到方程，人们往往最关心它的解是什么. 不妨把差分方程与代数方程作一个比较. 代数方程的未知量是一个数，因而它的解也是数. 而对于差分方程，我们所求的是一个数列(如$\{F_n\}$)，所以我们把这个数列的通项公式(如(1.6))称作这个差分方程(如(1.1))的解. 一个数列也可以看作一个整变量函数，即定义在整数集的一个子集上的函数. 例如我们可以定义一个正整数集上的函数f如下:

$$f(n)=F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad (1.7)$$

那么也可以说f是方程(1.1)的一个解.*

其实，差分方程与我们的距离并不遥远，甚至并不陌生. 我们的读者一定熟悉等差数列与等比数列，它们的基本形式分别为

$$a_{n+1}=a_n+d \quad (d\text{ 为常数}) \quad (1.8)$$

和

$$a_{n+1}=qa_n. \quad (q\text{ 为非零常数}) \quad (1.9)$$

这本身就是两个差分方程. 而它们的通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad (1.10)$$

和

$$a_n=a_1q^{n-1} \quad (1.11)$$

则分别是两个方程的解.

---

* 如果将来读者学到了微分方程，就会发现微分方程与差分方程有很多相似之处. 微分方程、差分方程以及函数方程的未知元都是函数.

还有一个例子．我们知道，组合数 C_n^m * 满足公式

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}, \qquad (1.12)$$

它也可以看作一个差分方程．由于其中含有 n 和 m 两个变元，我们把这样的差分方程叫做偏差分方程．应用(1.12)进行推算，我们便可以写出杨辉三角形．

许多差分方程具有很有趣的性质或者重要的应用．例如方程

$$a_n=2a_{n-1}^2-1, \qquad (1.13)$$

它的右端含有 a_{n-1} 的平方项，这一点和我们上面看到的差分方程都不相同．当 $a_1=3$ 时，我们不难算出 $a_2=17$，$a_3=577$，$a_4=665857$．如果我们计算 $\frac{a_3}{2^3a_1a_2}$ 和 $\frac{a_4}{2^4a_1a_2a_3}$，就会惊奇地发现，前者是 1.414215…，后者是 1.414213562374…，分别与 $\sqrt{2}$ 相差不足 3×10^{-6} 和 2×10^{-12}．这样我们就有一个计算 $\sqrt{2}$ 的好方法．迄今为止还没有什么方法比这更快更准确的．

有时候，我们还会遇到像下面这样看上去似乎不难，做起来却很棘手的问题．

【例1】 给定一个平面上的三角形 $\triangle A_1A_2A_3$．设 A_4 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心，A_5 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心，…，一般地，A_n 为 $\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$ 的重心．这样我们就得到一列点 A_1，A_2，…，A_n，…如果画一个图(如图1)

图 1

* 组合数 C_n^m 的定义为：从 n 个不同元素中取出 m 个($m\leqslant n$)不同元素的所有取法的种数，它的公式为 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$．在有的书中组合数也记作 $\binom{n}{m}$．

就会看到，我们得到一串一个套一个的三角形，每个三角形的面积是前一个的 $\frac{1}{3}$，因而很自然地想到点列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 会趋向某个点 P，也就是说，当 n 趋于无穷大时，线段 A_nP 的长度趋于 0. 可是怎样确定 P 点的位置呢？

如果我们建立一个坐标系*，并设 A_n 的坐标为 (x_n, y_n)，那么由解析几何可知，$\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$ 的重心坐标是 $\left(\frac{x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1}}{3}, \frac{y_{n-3}+y_{n-2}+y_{n-1}}{3}\right)$. 由于 $\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$ 的重心是 A_n，我们有

$$x_n=\frac{x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1}}{3}, \quad y_n=\frac{y_{n-3}+y_{n-2}+y_{n-1}}{3}, \tag{1.14}$$

而点 P 的坐标应该是数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限. 读者如果尝试一下，从(1.14)出发，就会发现这不是一个简单的求极限问题. 我们将在第五节看到怎样利用差分方程来解决这个问题.

【例 2】 有一位幼儿园老师给 20 个小朋友分糖果. 她打开糖盒看了看，然后把盒里糖果的一半分给第一个小朋友. 接着从另一个盒中抓了 4 块糖补充进来，再将盒里糖果的 $\frac{1}{3}$ 分给第二个小朋友. 以后她一直这样，先从别的盒子中抓 4 块糖补充进来，再将盒里糖果的 $\frac{1}{n+1}$ 分给第 n 个小朋友. 这样，所有的小朋友都分过了，盒里最后余下 40 块糖. 问哪个小朋友分得的糖最多？

---

* 熟悉复数的读者可以建立复平面，将点 A_n 的坐标记为 z_n，于是(1.14)可改写成 $z_n=\frac{z_{n-3}+z_{n-2}+z_{n-1}}{3}$. 参看[2].

看到这里你也许会怀疑：难道这也与差分方程有关吗？如果你要用推算的方法找答案，可别从第一个小朋友开始，而应该从最后的结果算起．只要推算几次，就会觉得其中有一种固定的关系，而这恰好可以表达为一个差分方程；解出这个差分方程，分糖果的情况便明白了．那时你一定会说这个老师分糖分得很公平呢．有意思吗？在第八节我们将对这个问题先建立一个差分方程，再作出答案．

还可以举一些例子．如：你能将根式

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}} \tag{1.15}$$

写成一个 n 的解析式吗？又如：你会求

$$C_n^0+2\cdot 2^1C_n^1+3\cdot 2^2C_n^2+\cdots+(n+1)\cdot 2^nC_n^n \tag{1.16}$$

的和吗？这些问题不是一眼看去就知道与差分方程有关的．

甚至有的数学游戏也与差分方程有不解之缘．如果你的朋友中有人喜欢玩猜测型的游戏，你不妨拿下面一个问题给他猜猜看：

有一位先生，有着良好的储蓄习惯．他每月都要将自己收入的一部分存入银行，待需要花费时再取出来．在去年最后一个月中，他存入和取出的钱相同．今年他的计划是：每个月存入的钱比前一个月取出的钱多 1 元，而取出的钱比前一个月存入的钱少 1 元．那么从今年开始，每个月中是存入的多呢，还是取出的多？

假如你的朋友很粗心，可能会轻而易举地上当；如果是位乐于细算的朋友，你不妨把问题问得更难些，如：这位先生是不是有哪个月存的少，取的多？为什么？还可以改变去年最后一个月的存取情况，那样答案立即就可能改变．这更有利于

把问题搞得使人费解.

读到这里，可能有的读者已经感到留下的问题太多了. 不要紧，在以后的各节中，它们会与我们重新见面，并一一得到解答. 总的来讲，我们的目的是要搞清楚:

1. 差分方程是怎么回事;

2. 怎样解差分方程;

3. 差分方程有哪些应用.

二、定义与定理

在第一节中，我们已经对差分方程有了初步的印象和了解．本节中，我们来系统地对一些概念给予定义，并引入两个定理，为以后几节中有关解差分方程的内容作准备．

前面我们曾提到，差分方程是一个数列相邻几项之间均满足的一个关系式．一般地，设$\{a_n\}$是一个数列（或者说，a_n是一个整变量函数），我们把一个关系式

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}, n) \tag{2.1}$$

叫做一个*差分方程*．其中F是一个$k+1$元函数（k是一个固定的正整数）．从数列的意义上看，差分方程也就是数列的递推关系式．例如上一节的(1.1)，(1.8)，(1.9)．还可以举几个例子，如

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \tag{2.2}$$

$$f(n) = 2f(n-1) + nf(n-3), \tag{2.3}$$

等等，都是差分方程．

在(2.1)中，除了n之外，a_n还是$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$的函数．我们把这样的差分方程叫做$k$阶的．就是说，$k$阶差分方程是一个数列中任意$k+1$个相邻项之间均满足的关系式．前一节的方程(1.1)是2阶的，而(1.8)和(1.9)是1阶的；本节中(2.2)是1阶的，但(2.3)是3阶的．

我们把差分方程

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + c \tag{2.4}$$

叫做线性差分方程，其中 c_1, c_2, $\cdots$, c_k, c 都是 n 的已知函数. 当 $c=0$ 时，又叫做线性齐次差分方程；如果 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 都是常数，则把(2.4)叫做常系数线性差分方程.

上节的(1.1)和(1.9)是常系数线性齐次差分方程；而(1.8)在 $d\neq 0$ 时是常系数线性非齐次的；本节的(2.3)虽不是常系数的，但却是线性齐次差分方程，而(2.2)则是非线性的.

我们知道，对一个给定的代数方程，通常是不需要附加什么条件便可以求解的. 但差分方程呢？我们再次看一看方程

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}.$$

由 $F_1=1$, $F_2=1$, 我们便可以根据方程计算出 F_3, F_4, F_5, $\cdots$ 这就是说，数列 $\{F_n\}$ 的各项均被唯一确定了，它们都满足公式(1.3). 但如果我们将前两项稍作改变，变为 $F_1=1$, $F_2=2$, 以后各项便成为 3, 5, 8, 13, $\cdots$恰好与斐波那契数列的各项序号相差 1，因此方程的解也相应地变成

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

若前两项变为

$$F_1=F_2=2,$$

则以后各项都是原来的 2 倍，解便成了

$$F_n=\frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

可见 F_1 和 F_2 的值对方程的解有重要的影响. 应该说，它们与差分方程(1.1)一同决定了解的表达式. 我们把上一节的(1.2)叫做方程(1.1)的*初始条件*. 而 $F_1=1$, $F_2=2$ 则是方程(1.1)的另一个初始条件.

一般地，差分方程的初始条件是整变量 n 的连续若干个函数值(或数列的前若干连续项)，通常将它们写成若干个等

式.

什么样的初始条件是合理的呢?我们说,给定的函数值个数如果恰好使差分方程能确定以后的所有函数值,便是合理的. 仍以方程 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 为例,若只给出 $F_1=1$, 便求不出 F_2, 当然 F_3, F_4, …都无法求出. 但如果不仅给出了 $F_1=1$, $F_2=1$,另外又给了一个 F_3 的值, 则要么 F_3 与 F_1+F_2 相等,因而是多余的(可以由方程求得),要么与 F_1+F_2 不等, 反使差分方程无法求解. 因此, 对方程(1.1)来说, 给定 F_1 和 F_2 的值,是初始条件的唯一合理形式. 同理,对于 k 阶的方程(2.1), 合理的初始条件应当有 k 个等式, 如给出 a_1, a_2, …, a_k 的值. 这样, 我们就可以用前 k 个函数值(或数列的前 k 项)去推算出其余的函数值(以后各项).

如果在已知

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ \cdots,\ a_k=f(k) \tag{2.5}$$

的情况下, 根据方程(2.1)能求得 $a_{k+1}=f(k+1)$, $a_{k+2}=f(k+2)$, … 我们就得到了一个函数关系 $a_n=f(n)$, $(n=1, 2, \cdots)$, 找出这个函数关系的过程就是解差分方程. 通常,我们把这个函数的解析表达式(或数列的通项公式)叫做*差分方程(2.1)在初始条件(2.5)下的解*. 例如上一节中,(1.3)就是方程(1.1)在初始条件(1.2)下的解.

注意,"差分方程(2.1)在初始条件(2.5)下的解",不仅是指由(2.1)和(2.5)共同确定的函数(或数列)满足 $a_n=f(n)$, 还包含以下的涵义:

1. 由 $a_n=f(n)$ 计算出的 $f(1)$, …, $f(k)$ 就是初始条件(2.5);

2. 按 $a_n=f(n)$ 写出的 $a_{n-1}=f(n-1)$, …, $a_{n-k}=f(n-k)$, 使等式(2.1)成立, 即

$$f(n)=F[f(n-1),\ f(n-2),\ \cdots,\ f(n-k)].\quad (2.6)$$

按以上的内容,我们便能得知,在合理的初始条件下,差分方程的解只能是唯一的.因为此时所有的函数值都已被确定,当然函数关系式是唯一的了.(这里不排除某些形式上的差别.)这个事实便是以下的定理.

定理1 若有两个整变量函数都满足差分方程(2.1)及初始条件(2.5),则这两个函数相等.

这个定理看上去几乎是显而易见的事实,但却很重要.在后面的内容中将会有它的应用.

【例1】 证明 $a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 是差分方程 $a_n=a_{n-4}$ 在初始条件 $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=-1,\ a_4=1$ 下的解.

证明 不难验证,$a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 满足初始条件的四个等式.另外,

$$\begin{aligned}a_{n-4}&=(-1)^{\frac{(n-4)(n-4-1)}{2}}=(-1)^{\frac{n(n-1)-4(2n-5)}{2}}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{2(2n-5)}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=a_n,\end{aligned}$$

这表明 $a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 也满足方程 $a_n=a_{n-4}$.因此

$$a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

是方程 $a_n=a_{n-4}$ 在初始条件 $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=-1,\ a_4=1$ 下的解.

但当我们读到后面的第五节时,再回过头来解这个例题中的方程,则会求得

$$a_n=\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi,$$

这并不是说,方程 $a_n=a_{n-4}$ 在所给定的初始条件下有两个解,

而只应该认为$\sqrt{2}\cos\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$对任何自然数$n$成立．这就是前面提到的“形式上的差别”．

另外，对于一个差分方程来说，不一定任意给出一组初始条件，就一定可以确定一个函数关系．如方程

$$a_n=\frac{1}{a_{n-1}+1},\tag{2.7}$$

当$a_1<-2$或$a_1>-1$时，不难证明必有$a_3>0$，从方程右边可以看出，以后得出的a_4，a_5，…都是正值，因此函数关系一定存在．但当$a_1=-2$时，$a_2=-1$，于是a_3不存在，当然函数关系也就不存在了．但很显然，出现这个现象的原因是有了一个$a_{n-1}=-1$，使对a_n的计算超出了(2.7)右端函数的定义域．因此，当方程(2.1)右端函数F对所有变量的所有可能的取值都有定义时，上面那种现象也就不会存在了．此时便有

定理2 设方程(2.1)右端的函数F对所有变量的所有可能取值(其中最后一个变量n只取正整数)都有定义，则对任意初始条件(2.5)，存在一个以正整数为自变量的函数$f(n)$(或数列a_n)，满足(2.1)和(2.5)．

我们把定理1和定理2合称为“常差分方程解的存在唯一性”．在定理的叙述中之所以没有用“解”这个名称，而只讲整变量函数或数列，原因是人们对“解”的理解不尽相同．有的把定理2中的函数就叫做解，也有的则只在$f(n)$能用我们熟悉的函数显式表达时才称为解．至于我们所熟悉的表达形式究竟包括哪些(例如，能否使用求和符号$\sum$?)也没有统一的规定．在下面，我们一般是把“解”理解为函数$f(n)$的一个解析表达式．

除此而外，还需要说明，并非任何差分方程都可以找到一

个表达式作为它的解的．例如一阶差分方程

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{4}-(-1)^{a_{n-1}}\left(\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{4}\right),\quad a_1=k,$$

$$(k\text{ 是自然数})\qquad(2.8)$$

目前就还没什么办法可以解出．用电子计算机进行了大量计算，结果表明，无论 k 取什么自然数，总存在一个自然数 n，使 $a_n=1$．但这个结果却至今没能被人们证明．*

对于差分方程

$$a_n=a_{n-1}+n!,\quad a_1=1,\qquad(2.9)$$

如果不允许出现求和符号 Σ 的话，是一个无法写出解的方程．类似的方程后面还会遇到．这时候，我们常常把方程的解写成其他形式．

有的差分方程，在未给出初始条件时，便可以写出解所具有的形式．只是这种形式的解中无可避免地将留有若干个待定的常数，它们可以根据所给的初始条件来确定．我们把这样的解叫做差分方程的解的*一般形式*(或*通解*)．如上一节的(1.10)和(1.11)，就分别是方程(1.8)和(1.9)的通解，要在给出 a_1 的值后才完全确定．为了区别起见，把在已知初始条件下的解叫做特解．具有通解的差分方程是我们要研究的主要方面之一．

习 题 一

1．说出下列差分方程各是几阶的：

(1) $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}-a_{n-3}$；

(2) $b_n+b_{n-2}=4$；

(3) $x_{n+1}=nx_n+(n-1)x_{n-1}$；

---

* 这是一个十分困难的问题，许多数学家花了很多功夫也未能解决．因而我们希望读者不要为此而花时间．

(4) $y_n=\sqrt{y_{n-1}+1}$;

(5) $u_n=u_{n-1}^2+2u_{n-1}+1$;

(6) $v_n=v_{n-k}$ （k 是一个正整数).

2．指出第 1 题中，哪些方程是

(1) 线性齐次的;

(2) 常系数线性差分方程;

(3) 常系数线性齐次差分方程;

(4) 非线性的.

3．通过验证满足方程和初始条件的方法，证明 $a_n=\frac{1}{6}(-2)^n+\frac{1}{3}$ 是差分方程 $a_{n+1}=-a_n+2a_{n-1}$ 在初始条件 $a_1=0$, $a_2=1$ 下的解.

4．证明，对任何正常数 c，整变量函数 $x_n=\sqrt{c\cdot 3^n+1}$ 总满足差分方程 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n^2-2}$.

又问，差分方程 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n^2-2}$ 在初始条件 $x_1=2$ 下的解是什么?

三、常系数线性齐次差分方程

在各种形式的差分方程中，有一类具有特别重要的地位，这就是常系数线性齐次差分方程. 它之所以重要，一方面是由于这类方程有一般解法，因而使那些可以转化为这类方程的其他方程也有了求解的途径；另一方面，这类方程有着许多有趣的性质，有极其广泛、丰富多彩的应用. 在本节中，我们先引进常系数线性齐次差分方程的特征根概念，然后来研究怎样解这一类方程.

按上一节所述，我们可以把一个 k 阶常系数线性齐次差分方程写成

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ka_{n-k}=0, \qquad (3.1)$$

这里，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是常数，$p_k\neq 0$. 先不考虑初始条件.

我们在第一节曾遇到过一个 $k=1$ 的例子，就是等比数列满足的方程(1.9). 它的解(1.11)可以看成指数式 q^n 与一个常数 $\frac{a_1}{q}$ 的积.

斐波那契数列$\{F_n\}$所满足的方程(1.1)，正是 $k=2$ 的情形. 而它的解(1.3)中，恰好又出现了两个指数式：$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 和$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. 这两个例子启发我们作出猜测：是不是方程(3.1)的解总是与指数式有关？

我们不妨先假设 $a_n=x^n(x\neq 0)$是方程(3.1)的一个解，于是有 $a_{n-i}=x^{n-i}(i=0, 1, \cdots, k)$. 将它们代入(3.1)，得到

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_kx^{n-k}=0,$$

消去 x^{n-k}，得

$$x^k+p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k=0. \tag{3.2}$$

这可以看成一个关于 x 的代数方程，它与(3.1)有着密切的关系. 我们把(3.2)的左边

$$x^k+p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k \tag{3.3}$$

叫做方程(3.1)的**特征多项式**，并把特征多项式的根(也就是方程(3.2)的根)叫做(3.1)的**特征根**.

上面的讨论说明，如果 $a_n=\lambda^n(\lambda\neq 0)$ 是差分方程(3.1)的解，则 λ 就是(3.1)的特征根(即(3.2)的根)；反过来，若 λ 是(3.1)的一个特征根，便有

$$\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+\cdots+p_k=0,$$

也就是 $$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\cdots+p_k\lambda^{n-k}=0,$$

则 $a_n=\lambda^n$ 是方程(3.1)的解. 简言之，

引理 3.1 设 λ 为非零常数，则 $a_n=\lambda^n$ 是方程(3.1)的解当且仅当 λ 是(3.1)的特征多项式(3.3)的根.

接下来，我们再注意斐波那契数列的通项公式. 上一节我们在讨论初始条件时，就 $F_1=1$，$F_2=2$ 及 $F_1=F_2=2$ 两种情况，写出了方程(1.1)的解. 它们与 $\{F_n\}$(即 $F_1=1$，$F_2=1$ 时的解)有一个共同之处，就是解都可以表示为

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3.4}$$

的形式，其中 c_1，c_2 是两个常数. (当 $F_1=1$，$F_2=2$ 时，解

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ 可以写成 $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.) 而方程 (1.1) 的特征

多项式为 x^2-x-1,它的两根正是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,根据引理 3.1,

$$F_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

和

$$F_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

都是(3.1)的解,也就是

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

于是有

$$\begin{aligned}
&c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\
&=c_1\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&\quad+c_2\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&=\left[c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\\
&\quad+\left[c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right],
\end{aligned}$$

说明不论 c_1, c_2 是什么常数, (3.4)都满足方程(1.1). 这就进一步提示我们考虑更一般的情形:

设 $a_n=f(n)$, $a_n=g(n)$ 都是(3.1)的解, 即

$$f(n)+p_1f(n-1)+p_2f(n-2)+\cdots+p_kf(n-k)=0, \tag{3.5}$$

$$g(n)+p_1g(n-1)+p_2g(n-2)+\cdots+p_kg(n-k)=0. \tag{3.6}$$

设 c, d 是两个常数，将(3.5)乘以 c，再加上(3.6)乘以d，就得到

$$[cf(n)+dg(n)]+p_1[cf(n-1)+dg(n-1)]+\cdots$$
$$+p_k[cf(n-k)+dg(n-k)]=0.$$

令
$$cf(n)+dg(n)=h(n),$$

就有

$$h(n)+p_1h(n-1)+\cdots+p_kh(n-k)=0. \tag{3.7}$$

这就是说，$a_n=h(n)$同样是(3.1)的解．我们又得到了一个结论：

引理 3.2 设 $a_n=f(n)$和 $a_n=g(n)$都是方程(3.1)的解，c，d 是两个常数，则

$$a_n=h(n)=cf(n)+dg(n)$$

也是方程(3.1)的解，且满足初始条件

$$a_1=cf(1)+dg(1),\ a_2=cf(2)+dg(2),\ \cdots,$$
$$a_k=cf(k)+dg(k).$$

现在，我们可以来求斐波那契数列的通项公式了．

根据引理 3.2，无论 c_1，c_2 取什么常数值，(3.4)总是满足方程(1.1)的．这样，我们只需找到一组 c_1，c_2 的值，使(3.4)也满足条件 $F_1=F_2=1$，也就是

$$\begin{cases} c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1, \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1. \end{cases}$$

这是一个关于 c_1，c_2 的二元一次方程组，不难解得

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

代入(3.1)，就得到了$\{F_n\}$的通项公式(1.3)。

如果我们按照这个思路继续思考，就会猜想，当我们求出了方程(3.1)的所有特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 时，就可以对任意一组常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 下结论：

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n \tag{3.8}$$

是方程(3.1)的解．若我们能通过确定 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 的值，使(3.8)满足已给的初始条件，就得出了方程(3.1)在初始条件下的解．这样，不是就完全解决了方程(3.1)在初始条件下的求解问题了吗？

作为解方程(3.1)的方法，当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 两两不相等时，这样的结论确实是正确的．但下面的例子会告诉我们，当方程(3.2)有重根时，用(3.8)来表示的解未必能满足给定的初始条件．

设$\{a_n\}$是一个等差数列，则从第 2 项起，每一项都是它前、后两项的等差中项(为什么？)，也就是

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

将它写成一个线性齐次差分方程的形式，为

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}, \tag{3.9}$$

它的特征多项式为

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

因而有二重特征根 1．此时，若像(3.8)那样写解，则 a_n 就是一个常数了．但我们知道，由于$\{a_n\}$是等差数列，应有

$$a_n = c_1 n + c_2,$$

只要公差 $d\neq0$，则 $c_1=d$ 也不为零. 可见差分方程(3.9)的解在 $a_1\neq a_2$ 的情况下，便不满足(3.8)的形式.

对这个问题推广一步，考察方程

$$a_n=2pa_{n-1}-p^2a_{n-2},\quad (p\ \text{为常数}) \tag{3.10}$$

因为它的特征根为二重根 p，除了 $a_n=p^n$ 是一个指数形式的解外，还有一个什么样的简单解呢？联系前面等差数列的例子试一试，就会发现 $a_n=np^n$ 也是一个解. 根据引理 3.2，凡是具有形式 $a_n=c_1p^n+c_2np^n=p^n(c_1+c_2n)$（其中 c_1，c_2 是两个常数）的整变量函数，都是(3.10)的解.

接下去，再对特征根的重数 r 作推广，就能得出结论：若 λ 是方程(3.2)的 r 重根，则对任意一个次数小于 r 的多项式 f，$a_n=\lambda^nf(n)$ 都是方程(3.1)的解. 将以上的讨论作一个总结，就是下面重要的"常系数线性齐次差分方程的通解定理".

定理 3 差分方程 $a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ka_{n-k}=0$（$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为常数，且 $p_k\neq0$）在任意给定的初始条件 $a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$\cdots$，$a_k=f(k)$ 下，都有形如

$$a_n=f(n)=\sum_{0\leq j\leq k_i-1}c_{ij}n^j\lambda_i^n \tag{3.11}$$

的解. 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是多项式(3.3)的所有互不相同的根，λ_i 的重数是 k_i，c_{ij} 是由初始条件确定的常数（$i=1, 2, \cdots, r$；$j=0, 1, \cdots, k_i-1$）.

反之，形如(3.11)右端的函数 $f(n)$ 一定满足一个形如(3.1)的方程.

这个定理的证明比较抽象，且涉及的预备知识较多，我们将它收入附录 II 中. 有兴趣的读者若多花些时间，也完全可以弄懂.

我们注意，定理中包含着以下细节：

1. 方程(3.1)的解，总可以由它的特征根所组成的一个表达式(3.11)表出．关于(3.11)式，我们应对它作如下理解：

首先，设多项式(3.3)在复数范围内可以分解为

$$(x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\cdots(x-\lambda_r)^{k_r}.^*$$

这里，$k_1+k_2+\cdots+k_r=k$．于是 $f(n)$ 便可以表为

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{j=0}^{k_1-1} c_{1j}n^j\lambda_1^n+\sum_{j=0}^{k_2-1} c_{2j}n^j\lambda_2^n+\cdots+\sum_{j=0}^{k_r-1} c_{rj}n^j\lambda_r^n\\&=(c_{10}+c_{11}n+\cdots+c_{1k_1-1}n^{k_1-1})\lambda_1^n\\&\quad+(c_{20}+c_{21}n+\cdots+c_{2k_2-1}n^{k_2-1})\lambda_2^n+\cdots\\&\quad+(c_{r0}+c_{r1}n+\cdots+c_{rk_r-1}n^{k_r-1})\lambda_r^n.\end{aligned}$$

当然，如果 $k_i=1$(即 λ_i 为单根)，第 i 个括号内就仅有常数项 c_{i0} 了，这就是与(3.8)正好相符的情形．

习惯于双重和号的读者，也可以将(3.11)改记为

$$f(n)=\sum_{i=1}^{r}\left(\lambda_i^n\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}n^j\right). \tag{3.12}$$

2. (3.11)式或(3.12)式的右边，有

$$\sum_{i=1}^{r} k_i=k$$

个常数 c_{ij}．这些常数在给定初始条件的 k 个等式时，便可以与(3.11)组成一个关于 c_{ij} 的 k 元线性方程组．这个方程组总是有解的．因为形如(3.11)的解对任何初始条件都存在．另外，这个方程组仅有唯一解．这是因为根据定理1，方程(3.1)在初始条件下的解是唯一的，因而这组常数 c_{ij} 只能是唯一确定的．我们通过解这个关于 c_{ij} 的方程组，求出 c_{ij} 的值，从而就求出(3.1)的一个特解．

* 根据“代数基本定理”，在复数范围内，一元 k 次多项式有 k 个根，因而能分解为 k 个一次因式的乘积．参看例如参考文献[3]或普通的复变函数论或抽象代数教材．

3．对于一个形如(3.11)的函数 $f(n)$，总可以写出一个它所满足的 k 阶常系数线性齐次差分方程．因而 $f(n)$ 可以用形如(3.1)的差分方程及初始条件来定义或表示．

定理 3 的重要性，首先在于它为我们提供了解方程(3.1)的一般方法．

【例 1】 给定差分方程 $a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$．

(1) 求方程的特征多项式和特征根；

(2) 写出方程的通解；

(3) 求满足初始条件 $a_1=0$，$a_2=2$ 的特解．

解 (1) 由 $a_n-3a_{n-1}-4a_{n-2}=0$，可以写出特征多项式

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1),$$

其特征根为 4 和 -1．

(2) 方程的通解为

$$a_n=c_1 4^n+c_2(-1)^n,$$

其中 c_1，c_2 是两个常数．

(3) 要求出满足 $a_1=0$，$a_2=2$ 的特解，可以通过解下列方程组确定 c_1，c_2 的值：

$$\begin{cases} 4c_1-c_2=a_1=0, \\ 16c_1+c_2=a_2=2. \end{cases}$$

解得
$$c_1=\frac{1}{10},\quad c_2=\frac{2}{5}.$$

因此，
$$a_n=\frac{1}{10}\cdot 4^n+\frac{2}{5}(-1)^n.$$

这个例题中三小题的要求，实际上就是解常系数线性齐次差分方程的三个步骤：

1．写出方程的特征多项式，并求出特征根；

2．写出通解；

3．根据初始条件和通解，列出一个关于待定常数的线性方程组并解之，进而写出特解．

对二阶的常系数线性齐次差分方程，也并非一定要用上述的办法求解．例如我们可以用代换的方法：

设方程可以写成

$$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2}), \tag{3.13}$$

其中 α, β 是两个待定的常数．也就有

$$a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2},$$

对照例 1 的方程，应有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3,\\ \alpha\beta=-4.\end{cases}$$

解这个方程组，可以得到

$$\begin{cases}\alpha=4,\\ \beta=-1\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\alpha=-1,\\ \beta=4.\end{cases}$$

从中任取一组解，例如取后一组，代入(3.13)，为

$$a_n+a_{n-1}=4(a_{n-1}+a_{n-2}).$$

令 $a_n+a_{n-1}=b_{n-1}$，于是 $b_1=a_2+a_1=2$, $b_{n-1}=4b_{n-2}$.

由第一节的(1.9)和(1.11)，便有

$$b_{n-1}=b_14^{n-2}=2\cdot4^{n-2},$$

所以，
$$a_n+a_{n-1}=2\cdot4^{n-2},$$

由此可以写出

$$\begin{cases}a_n+a_{n-1}=2\cdot4^{n-2},\\ a_{n-1}+a_{n-2}=2\cdot4^{n-3},\\ \cdots\cdots\\ a_2+a_1=2.\end{cases}$$

这样，

$$(a_n+a_{n-1})-(a_{n-1}+a_{n-2})+\cdots+(-1)^{n-2}(a_2+a_1)$$
$$=2[4^{n-2}-4^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-2}]$$
$$=\frac{2}{5}[4^{n-1}-(-1)^{n-1}]$$

左端除了 a_n 和 a_1 外，其余各项均正、负相抵消．于是有

$$a_n=a_n+(-1)^{n-2}a_1=\frac{2}{5}[4^{n-1}-(-1)^{n-1}].$$

我们可以把这个解法，叫做差分方程的一种“初等解法”，因为它不必依据定理 3.

细心的读者可能已发现，(3.13)中的常数 α, β 正是方程的两个特征根．是巧合吗？当然不是．这里的原因是什么，我们留给读者自己去寻找．——作为一个提示，请注意韦达定理的应用．

也许你还会问，前面用于解例 1 的两种方法哪一个比较简便？哪一个适用的范围更广？建议你再用后一个初等的方法求出斐波那契数列通项公式，自会得出答案．

我们在前面曾提到，特征根是特征多项式在复数范围内的根．若原差分方程的系数都是实数，初始值也全是实数，那么解当然也应只取实数值．但这时如果有虚数特征根，我们应当怎样避免让它的解中出现虚数呢？

【例 2】 解差分方程 $a_n+a_{n-3}=0$, $a_1=1$, $a_2=-2$, $a_3=0$.

解 这个三阶差分方程的特征多项式为 x^3+1，故特征根为 -1 和 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$.

设 $a_n=c_1(-1)^n+c_2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+c_3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$$=c_1(-1)^n+c_2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$+c_3\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n,$$

根据棣莫佛定理及诱导公式，可得到

$$a_n=c_1(-1)^n+c_2\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$+c_3\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$=c_1(-1)^n+(c_2+c_3)\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$+i(c_2-c_3)\sin\frac{n\pi}{3}.$$

由初始条件，有

$$\begin{cases}-c_1+\frac{1}{2}(c_2+c_3)+\frac{\sqrt{3}}{2}i(c_2-c_3)=1,\\ c_1-\frac{1}{2}(c_2+c_3)+\frac{\sqrt{3}}{2}i(c_2-c_3)=-2,\\ c_1+c_2+c_3=0,\end{cases}$$

解得 $\quad c_1=-1,\ c_2+c_3=1,\ c_2-c_3=\frac{1}{\sqrt{3}}i,$

所以 $\quad a_n=(-1)^{n+1}+\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}.$

这样，在解中没有出现虚数.

【例3】 已知整变量函数 $f(n)$ 满足关系式

$$f(n)+2f(n-1)-2f(n-3)-f(n-4)=0. \qquad (3.14)$$

若 $f(0)=f(1)=0,\ f(2)=6,\ f(3)=-10$，求 $f(n)$.

解 我们把(3.14)中的 $f(n)$，与前面例子中的 a_n，F_n 等等作同样的理解. 那么方程(3.14)的特征多项式为

$$x^4+2x^3-2x-1=(x+1)^3(x-1),$$

它有三重根-1和单根1.

设 $f(n)=c_0+(-1)^n(c_1+c_2n+c_3n^2)$, 再由初始条件可得出

$$\begin{cases} c_0+c_1=0, \\ c_0-c_1-c_2-c_3=0, \\ c_0+c_1+2c_2+4c_3=6, \\ c_0-c_1-3c_2-9c_3=-10, \end{cases}$$

解得 $$c_0=1,\ c_1=-1,\ c_2=c_3=1.$$

所以, $$f(n)=(-1)^n(n^2+n-1)+1.$$

【例 4】 求二阶差分方程

$$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1} \tag{3.15}$$

解的一般形式. 这里 a, b 是实数, x_n 是 n 的实值函数.

解 方程(3.15)的特征多项式为 x^2-ax-b, 它的两根所具有的形式, 与根的判别式 $\Delta=a^2+4b$ 的取值范围有关. 我们分三种情况讨论:

(1) $\Delta>0$.

特征根为两个不相同的实数

$$\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \text{ 和 } \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

此时有 $$x_n=c_1\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n.$$

(2) $\Delta=0$.

特征根为二重实根 $\frac{a}{2}$. 有

$$x_n=\left(\frac{a}{2}\right)^n(c_1+c_2n).$$

(3) $\Delta<0$.

特征根为共轭虚数 $\frac{a+i\sqrt{-a^2-4b}}{2}$ 和 $\frac{a-i\sqrt{-a^2-4b}}{2}$.

令 $$r=\sqrt{-b},\ \cos\theta=\frac{a}{2\sqrt{-b}},$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{-a^2-4b}}{2\sqrt{-b}},$$

则两根便可表为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 和 $r(\cos\theta-i\sin\theta)$,

$$\begin{aligned}x_n&=c_1[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n+c_2[r(\cos\theta-i\sin\theta)]^n\\&=r^n[(c_1+c_2)\cos n\theta+(c_1-c_2)i\sin n\theta].\end{aligned}$$

再令 $c_1+c_2=c_1'$, $(c_1-c_2)i=c_2'$, 则有

$$x_n=r^n(c_1'\cos n\theta+c_2'\sin n\theta).$$

这里, 由于 x_n 是 n 的实值函数, c_1' 和 c_2' 一定是两个实数. 你能说明原因吗?

【例 5】 求函数 $f(n)=(n+1)(-1)^n-3^{n-1}+2^{2n-1}$ 满足的常系数线性齐次差分方程.

解 将 $f(n)$ 写成

$$f(n)=(n+1)(-1)^n-\frac{1}{3}\cdot3^n+\frac{1}{2}\cdot4^n.$$

右边出现了 $(-1)^n$, 3^n 和 4^n, 且 $(-1)^n$ 与一个一次多项式相乘, 所以 $f(n)$ 满足的差分方程特征根为

$$-1,\ -1,\ 3,\ 4.$$

特征多项式为

$$(x+1)^2(x-3)(x-4)=x^4-5x^3-x^2+17x+12,$$

因此, $f(n)$ 满足的差分方程为

$$f(n)=5f(n-1)+f(n-2)-17f(n-3)-12f(n-4).$$

注意, 这里作出的差分方程并不是唯一的答案. 例如, 由于

$$f(n-1)=5f(n-2)+f(n-3)-17f(n-4)-12f(n-5),$$

如果我们将它与前面作出的方程两边分别相减，得到一个五阶的方程

$$f(n)=6f(n-1)-4f(n-2)-18f(n-3)+5f(n-4)+12f(n-5),$$

显然 $f(n)$ 也满足这个方程．而我们用例 5 的方法，求出的是 $f(n)$ 所满足的常系数线性齐次差分方程中阶数最低的一个．在左边为 $f(n)$ 的情况下，这样的四阶方程是唯一的．这种构造差分方程的作法，常常有助于把许多看上去与差分方程无关的问题，转化为差分方程问题来解决．而这正是差分方程的耐人寻味之处．

习　题　二

1．解下列差分方程：

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$, $a_0=0$, $a_1=1$;

(2) $x_n=4x_{n-1}-2x_{n-2}-4x_{n-3}$, $x_1=4$, $x_2=12$, $x_3=28$;

(3) $y_n=6y_{n-1}-12y_{n-2}+8y_{n-3}$, $y_1=y_2=0$, $y_3=16$;

(4) $b_{n+1}=2b_n-2b_{n-1}$, $b_0=1$, $b_1=2$.

2．(1) 求由 $a_n=2a_{n-2}-a_{n-4}$, $a_1=a_3=1$, $a_2=a_4=2$ 确定的数列 $\{a_n\}$ 的通项；

(2) 试找出 $\{a_n\}$ 与方程(3.9)的关系，并用两种不同的方法证明你的结论．

3．已知 a_n 满足特征多项式为 $f(x)$ 的常系数线性齐次差分方程．

(1) 证明：a_n 也满足以 $(x-\lambda)f(x)$ (λ 为非零常数)为特征多项式的常系数线性齐次差分方程；

(2) 若 $g(x)$ 是多项式，且 $g(0)\neq 0$．那么 a_n 是否满足以 $g(x)\cdot f(x)$ 为特征多项式的常系数线性齐次差分方程？为什么？

4．写出下列各整变量函数所满足的阶数最低的常系数线性齐次差分方程：

(1) $f(n)=1-(\sqrt{3})^{n-2}[1-(-1)^n]$;

(2) $f(n)=2^n+2^{2n}+2^{3n}+2^{4n}$;

(3) $f(n)=n^2-2+\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}$.

5. 设 $T(x)$是一个多项式，若 $T(2^m)=6T(2^{m-1})-8T(2^{m-2})$，$T(1)=0$，$T(2)=2$，求 $T(n)$。（提示：先求 $T(2^m)$。）

6. 求差分方程 $x_n=ax_{n-1}+(a-1)x_{n-2}+ax_{n-3}-x_{n-4}$（$a$ 为实数且 $a\neq-2$）的通解。

7. 已知 a_n 满足常系数线性齐次差分方程 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$，λ 是非零常数。

(1) 求证：$a_n+\lambda^n$ 满足差分方程

$$a_n+(p-\lambda)a_{n-1}+(q-\lambda p)a_{n-2}-\lambda qa_{n-3}=0;$$

(2) 写出 $\lambda^n a_n$ 满足的二阶常系数线性齐次差分方程。

四、从齐次方程到非齐次方程

上一节中，给出了常系数线性齐次差分方程的一般解法。我们还曾提到，有一些方程，是可以转化为这一类方程来解的。其中，就有常系数线性非齐次差分方程。

按照第二节的(2.4)，我们可以把任意一个 k 阶常系数线性非齐次差分方程表示成

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ka_{n-k}=C(n), \quad (4.1)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是常数，$p_k\neq 0$，$C(n)$是 n 的一个不恒等于零的已知函数。如果把(4.1)与上节的(3.1)作一个比较，便可以看出二者的区别仅在于右边是否为零。我们把(3.1)叫做(4.1)所对应的齐次方程。以下的定理，叙述了两个方程的解之间的关系。

定理 4 设 $g_0(n)$ 是差分方程(4.1)的一个特解。对方程(4.1)的任何一个解 $g(n)$，$f(n)=g(n)-g_0(n)$都是它所对应的齐次方程(3.1)的解；反之，若 $f(n)$是方程(3.1)的解，则

$$g(n)=f(n)+g_0(n)$$

也是方程(4.1)的解。

如果给定(4.1)的初始条件 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的值，只要(3.1)的解 $f(n)$满足 $f(1)=a_1-g_0(1)$，$f(2)=a_2-g_0(2)$，$\cdots$，$f(k)=a_k-g_0(k)$，则 $g(n)=f(n)+g_0(n)$就是方程(4.1)在给定的初始条件 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 值下的解。

证明 由于 $g_0(n)$是方程(4.1)的解，所以

$$g_0(n)+p_1g_0(n-1)+\cdots+p_kg_0(n-k)=C(n). \quad (4.2)$$

若 $g(n)$ 也是(4.1)的解，则

$$g(n)+p_1g(n-1)+\cdots+p_kg(n-k)=Q(n). \qquad (4.3)$$

将(4.2)与(4.3)两式相减，得到

$$[g(n)-g_0(n)]+p_1[g(n-1)-g_0(n-1)]+\cdots$$
$$+p_k[g(n-k)-g_0(n-k)]=0,$$

而 $f(n)=g(n)-g_0(n)$，也就是

$$f(n)+p_1f(n-1)+\cdots+p_kf(n-k)=0, \qquad (4.4)$$

可见 $f(n)$ 是方程(3.1)的解.

反之，若将(4.2)与(4.4)两式相加，便可以得到(4.3). 可见 $f(n)+g_0(n)$ 是方程(4.1)的解.

又：由于 $g(n)=f(n)+g_0(n)$，根据定理中给出的初始条件之间的关系，立即可以得出 $g(1)=f(1)+g_0(1)=a_1$，…，$g(k)=f(k)+g_0(k)=a_k$，这就是说，$g(n)$ 是方程(4.1)的满足给定的初始条件的解.

定理 4 给出了一个解常系数线性非齐次差分方程的方法.

【例 1】 已知差分方程

$$a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=(n-1)!(n-1)^2.$$

(1) 验证 $a_n=(n+1)!$ 是方程的一个特解；

(2) 求方程在初始条件 $a_1=5$, $a_2=13$ 下的解.

解 (1) 由 $a_n=(n+1)!$ 得

$$a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=(n+1)!-3\cdot n!+(n-1)!$$
$$=[(n+1)n-3n+1](n-1)!=(n-1)^2(n-1)!,$$

所以，$a_n=(n+1)!$ 是方程的一个特解.

(2) 根据定理 4，我们只需先求出原方程所对应的齐次方程 $a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=0$ 在初始条件 $a_1=5-(1+1)!=3$, $a_2=13-(2+1)!=7$ 下的解，再作出它与 $(n+1)!$ 之和便是所求

的结果了.

按前节的例 4, 可求得齐次方程的解为

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

因此原方程在初始条件 $a_1=5$, $a_2=13$ 下的解为

$$a_n=(n+1)!+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

从例 1 中我们看到, 要解方程(4.1), 只需先找出它的一个特解, 剩下的便是解方程(3.1)及写出答案了.

【例 2】 求方程 $a_n-a_{n-2}=\frac{4}{n^2-4}$ 在初始条件 $a_1=0$, $a_2=1$ 下的解.

解 我们先来求方程的一个特解.

注意到

$$\frac{4}{n^2-4}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}=\left(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right),$$

如果将 $-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}\right)$ 看作 a_n, 那么 a_{n-2} 恰好就是 $-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}\right)$, 因此 $a_n=-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}\right)=-\frac{2n+2}{n(n+2)}$ 是方程的一个解.

再求方程 $a_n-a_{n-2}=0$ 在初始条件

$$a_1=0-\frac{2+2}{1\times3}=\frac{4}{3},$$

$$a_2=1+\frac{4+2}{2\times4}=\frac{7}{4}$$

下的解. 不难解得 $a_n=\frac{37}{24}+\frac{5}{24}(-1)^n$.

所以, 原方程的解为

$$a_n=\frac{37}{24}+\frac{5}{24}(-1)^n-\frac{2n+2}{n(n+2)}.$$

例1、例2所用的方法，是否可以看作解常系数线性非齐次方程的一般方法呢？有一个事实很明显，这就是要得到方程(4.1)的一个特解，并没有一定的规则可循．因此不能认为按定理4，方程(4.1)的解法问题就解决了．

如果说，以上的方法是将解方程(3.1)作为解方程(4.1)的一个组成部分，则下面要引入的方法，就是将非齐次方程(4.1)直接转化为齐次方程(3.1)来解．先通过一个例子，对两种方程解之间的关系作另一方面的探讨．

【例3】 证明：差分方程

$$a_n=2a_{n-1}+2n-1 \tag{4.5}$$

在任何初始条件下的解，都满足差分方程

$$b_n=4b_{n-1}-5b_{n-2}+2b_{n-3}. \tag{4.6}$$

证明 设方程(4.5)的一个解为 $a_n=f(n)$，则

$$f(n)=2f(n-1)+2n-1,\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

同时，$\qquad f(n-1)=2f(n-2)+2(n-1)-1,$

因而有

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=2[f(n-1)-f(n-2)]\\&\quad+2n-1-2(n-1)+1\\&=2[f(n-1)-f(n-2)]+2,\end{aligned}$$

也就是 $\qquad f(n)=3f(n-1)-2f(n-2)+2,$

于是又有 $\quad f(n-1)=3f(n-2)-2f(n-3)+2.$

因此，

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=3[f(n-1)-f(n-2)]\\&\quad-2[f(n-2)-f(n-3)],\end{aligned}$$

即 $\qquad f(n)=4f(n-1)-5f(n-2)+2f(n-3).$

这说明 $f(n)$ 也满足(4.6). 注意到上述过程与(4.5)的初始条件无关,所以要证明的结论成立.

如果我们反过来提出问题,方程(4.6)的解一定满足方程(4.5)吗? 回答是否定的. 例如给出初始条件 $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=5$,用上一节的方法可求得(4.6)的解 $b_n=2^n-n$,但由于

$$2b_{n-1}+2n-1=2[2^{n-1}-(n-1)]+2n-1=2^n+1\neq b_n,$$

所以 2^n-n 不满足方程(4.5), 它也就不可能是(4.5)的任何一个特解. 但当 $b_1=1, b_2=5$, $b_3=15$ 时,有 $b_n=3\cdot2^n-2n-3$, 此时, $2b_{n-1}+2n-1=2[3\cdot2^{n-1}-2(n-1)-3]+2n-1=3\cdot2^n-2n-3=b_n$, 也就是说 $3\cdot2^n-2n-3$ 满足方程 (4.5), 它是(4.5)在初始条件 $a_1=1$ 下的解.

看来,我们已经完全可以把类似于(4.5)的非齐次方程转化为如同(4.6)的齐次方程来解了. 但为此需要解决两个问题: (1)方程如何转化; (2)怎么给出新的初始条件.

为了便于一般地叙述怎么解决这两个问题, 我们引入差分的概念.

设 $f(n)$ 是一个整变量函数, 称 $f(n+1)-f(n)$ 为 $f(n)$ 的(一阶)差分,并记作 $\Delta f(n)$. 例如 $f(n)=2^n$,则

$$\Delta f(n)=2^{n+1}-2^n=2^n;$$

$$a_n=n^2-3n+2,$$

则 $\Delta a_n=(n+1)^2-3(n+1)+2-(n^2-3n+2)=2n-2.$

我们还规定,

$$\Delta[\Delta f(n)]=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)$$
$$=f(n+2)-2f(n+1)+f(n)$$

为 $f(n)$ 的二阶差分, 并记作 $\Delta^2 f(n)$, 以及类似地写出 $\Delta^3 f(n)$, $\Delta^4 f(n)$ 等等.

如果整变量函数 $f(n)=g(n)$,则

$$f(n+1)-f(n)=g(n+1)-g(n),$$

所以有 $\Delta f(n)=\Delta g(n)$. 根据归纳法, 还应有 $\Delta^k f(n)=\Delta^k g(n)$, $k=2, 3, \cdots$. 但反过来,如果

$$\Delta f(n)=\Delta g(n),$$

却不能得到 $f(n)=g(n)$. 例如 $f(n)=n$, $g(n)=n+1$, $\Delta f(n)=1=\Delta g(n)$, 但 $f(n)\neq g(n)$.

不难证明,对任何次数大于零的多项式求一阶差分,得到的是次数降低一次的一个多项式. 零次多项式(即一个非零常数)的一阶差分为零.

在后面的内容中,差分有更重要的应用. 这里,我们用它来表述以下方程的解法:

差分方程

$$a_n+p_1a_{n-1}+\cdots+p_ka_{n-k}=g(n) \tag{4.7}$$

中, p_1, p_2, $\cdots$, p_k 为常数, $p_k\neq 0$; $g(n)$是 n 的 m 次多项式. 我们先将(4.7)转化为一个齐次方程. 将(4.7)两边分别求 $m+1$ 阶差分,等式仍成立. 根据前面所述,右边将成为零. 而左边,每求一次差分, 方程的阶数便增加一阶, 所以最后得到的是 $k+m+1$ 阶常系数线性齐次差分方程

$$\Delta^{m+1}(a_n+p_1a_{n-1}+\cdots+p_ka_{n-k})=0. \tag{4.8}$$

注意,(4.7)的任何解,都满足方程(4.8). 再来看初始条件.

k 阶方程(4.7) 的初始条件仅有 k 个等式. 但方程(4.8)却需要 $k+m+1$ 个等式作初始条件. 除了前 k 个不变外, 以后的 $m+1$ 个值,应由(4.7)根据前 k 个函数值推算出来. 这样,由(4.7)及其初始条件确定的整变量函数, 不仅满足方程(4.8)的递推关系, 也满足(4.8)的初始条件, 因而就是(4.8)在其初始条件下的解. 注意,我们这样下结论的时候,实际上用到了第二节定理 1 的结论,即方程(4.8)在初始条件下的解

唯一.

现在,我们有了解方程(4.7)的方法了.

【例 4】 解差分方程 $x_n=2x_{n-1}+3x_{n-2}+4n-16$, $x_0=4$, $x_1=3$.

解 $x_{n+1}-x_n=2x_n+3x_{n-1}-2x_{n-1}-3x_{n-2}+4(n+1)$

$$-16-4n+16,$$

即
$$x_{n+1}=3x_n+x_{n-1}-3x_{n-2}+4.$$

又 $x_{n+1}-x_n=3x_n+x_{n-1}-3x_{n-2}-(3x_{n-1}+x_{n-2}-3x_{n-3})$,

即
$$x_{n+1}-4x_n+2x_{n-1}+4x_{n-2}-3x_{n-3}=0.$$

这是一个 4 阶常系数线性齐次差分方程. 它的特征多项式为

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3=(x-1)^2(x+1)(x-3),$$

特征根为 -1, 3 和二重根 1.

设 $x_n=c_1 3^n+c_2(-1)^n+c_3+c_4 n$. 由 $x_0=4$, $x_1=3$ 并经原方程推算,得 $x_2=10$, $x_3=25$,因此有

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=4, \\ 3c_1-c_2+c_3+c_4=3, \\ 9c_1+c_2+c_3+2c_4=10, \\ 27c_1-c_2+c_3+3c_4=25. \end{cases}$$

解得
$$c_1=c_2=1,\ c_3=2,\ c_4=-1.$$

所以,
$$x_n=3^n+(-1)^n+2-n.$$

从这个例题的前半部分可以看到,求出的 4 阶齐次方程,与方程 $x_n=2x_{n-1}+3x_{n-2}$ 相比, 特征根正好多出二重根 1, 这是偶然的吗?我们来研究一般情况.

对方程(4.7)所对应的齐次方程(3.1)求一阶差分,为

$$\Delta(a_n+p_1a_{n-1}+\cdots+p_ka_{n-k})$$
$$=(a_{n+1}+p_1a_n+\cdots+p_ka_{n-k+1})$$

$$-(a_n+p_1a_n+\cdots+p_ka_{n-k})=0,$$

其特征多项式为

$$(x^{k+1}+p_1x^k+\cdots+p_kx)-(x^k+p_1x^{k-1}+\cdots+p_k)$$
$$=(x-1)(x^k+p_1x^{k-1}+\cdots+p_k).$$

可见比多项式(3.3)正好多出了特征根1. 对求差分的次数进行归纳便可知，方程(4.8)的特征根，是(3.1)的所有特征根，再添上 $m+1$ 个根1. 难怪例4会出现前面讲到的情况了. 这么一来，解差分方程(4.7)的方法又可简化一步. 我们不必一次次地去求差分得出(4.8)，只要先求出(3.1)的所有特征根，再添上 $m+1$ 重根1(或使特征根1的重数增加 $m+1$ 重)，就可以继续以后的步骤了.

除了等差数列满足的差分方程 $a_n=a_{n-1}+d$ 之外，最简单的常系数线性非齐次差分方程就应该算是 $a_n=pa_{n-1}+q$ 了.

【例5】 求差分方程 $a_n=pa_{n-1}+q$ 的通解. 这里，p, q 为常数，且 $pq(p-1)\neq 0$.

解法一 将 q 看作零次多项式，按上面的讨论，能将方程 $a_n=pa_{n-1}+q$ 化为一个有特征根 p 和1的二阶齐次方程，于是我们设

$$a_n=c_1+c_2p^n,$$

再写出方程组

$$\begin{cases} c_1+pc_2=a_1, \\ c_1+p^2c_2=a_2=pa_1+q. \end{cases}$$

可解得 $$c_1=\frac{q}{1-p},\quad c_2=\frac{pa_1+q-a_1}{p(p-1)},$$

所以 $$a_n=\frac{q}{1-p}+\frac{pa_1+q-a_1}{p-1}\cdot p^{n-1}$$
$$=\frac{p^{n-1}(p-1)a_1+p^{n-1}q-q}{p-1}.$$

解法二 按定理4，我们先来找方程的一个特解. 由于已知方程仅比它所对应的齐次方程多出常数 q，我们猜想方程可能会有常数解，不妨试一下.

设 $a_n=x$，则有 $x=px+q$，即 $x=\frac{q}{1-p}$. 经验证，

$$a_n=\frac{q}{1-p}$$

确是方程的一个解.

由(1.9)和(1.11)，$b_n=pb_{n-1}$ 的解为 $b_n=b_1p^{n-1}$，所以

$$a_n=b_1p^{n-1}+\frac{q}{1-p}$$

是原方程的解. 而

$$b_1=a_1-\frac{q}{1-p},$$

因此，

$$a_n=\frac{a_1-pa_1-q}{1-p}\cdot p^{n-1}+\frac{q}{1-p}$$

为所求的通解.

解法三 设 $a_n-x=p(a_{n-1}-x)$，x 是待定的常数. 于是有 $a_n=pa_{n-1}+x-px$，故 $x-px=q$，即

$$x=\frac{q}{1-p}.$$

令

$$b_n=a_n-\frac{q}{1-p},$$

原方程变为 $b_n=pb_{n-1}$.

解法二中已得出 $b_n=b_1p^{n-1}$，也就是

$$a_n-\frac{q}{1-p}=\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1},$$

所以，

$$a_n=\frac{(a_1-pa_1-q)p^{n-1}+q}{1-p}.$$

这里的第三种解法，也是前面所讲过的"初等解法".

【例 6】 解差分方程 $a_{n+1}=-a_n-4n\cdot 3^n+2,\ a_1=2$.

解 对两边求一阶差分，得到

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-a_{n+1}-4(n+1)\cdot 3^{n+1}+2-(-a_n-4n\cdot 3^n+2),$$

即
$$a_{n+2}=a_n-3^n(8n+12),$$

消去了常数项 2.

以后若仍用求差分的方法，不能消去 3^n. 但

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=a_n-3^n(8n+12)-3a_{n-1}+3^n[8(n-1)+12],$$

即
$$a_{n+2}=3a_{n+1}+a_n-3a_{n-1}-8\cdot 3^n.$$

再重复一遍以上过程，就得到

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-8a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2},$$

它是一个齐次方程. 由于有解上面例 4 的经验，我们想到，方程的特征根应该是 1，-1，二重根 3(请读者自己验证并解释原因). 于是我们设

$$a_n=c_1+c_2(-1)^n+3^n(c_3+c_4n),$$

再将 a_1 代入原方程，逐步求出 $a_2=-12$, $a_3=-58$, $a_4=-264$. 解方程组

$$\begin{cases} c_1-c_2+3c_3+3c_4=2, \\ c_1+c_2+9c_3+18c_4=-12, \\ c_1-c_2+27c_3+81c_4=-58, \\ c_1+c_2+81c_3+324c_4=-264, \end{cases}$$

得
$$c_1=1,\ c_2=-\frac{7}{4},\quad c_3=\frac{3}{4},\ c_4=-1.$$

所以，
$$a_n=1-\frac{7}{4}(-1)^n+3^n\left(\frac{3}{4}-n\right).$$

例 6 显然是对前面的方法和结论的一个推广. 这个推广不仅表现在解方程的方法上，也反映在特征根的有关结论上.

那么，这种推广是否能一直做到解任意非齐次的常系数线性方程呢？这是办不到的．但当(4.1)右边是一个形如(3.11)的函数时，则总可以用上述方法转化为齐次方程来解的．*

【例7】 解差分方程 $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}+\sin n\alpha+\cos n\alpha$（$\alpha$ 是常量），$x_0=0$．

解 将方程写成

$$x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}=\sin n\alpha+\cos n\alpha,$$

于是有 $\quad x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=\sin(n+1)\alpha+\cos(n+1)\alpha,$

而 $\quad \sin(n+1)\alpha+\cos(n+1)\alpha$

$$\begin{aligned}&=\sin n\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos n\alpha+\cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha\\&=\cos\alpha(\sin n\alpha+\cos n\alpha)+\sin\alpha(\cos n\alpha-\sin n\alpha)\\&=\cos\alpha\left(x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}\right)+\sin\alpha(\cos n\alpha-\sin n\alpha),\end{aligned}$$

因此，

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n-\cos\alpha\left(x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}\right)=\sin\alpha(\cos n\alpha-\sin n\alpha),$$

因而有 $\quad x_{n+2}-\frac{1}{2}x_{n+1}-\cos\alpha\left(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\right)$

$$\begin{aligned}&=\sin\alpha[\cos(n+1)\alpha-\sin(n+1)\alpha]\\&=\sin\alpha(\cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha\\&\quad-\sin n\alpha\cos\alpha-\cos n\alpha\sin\alpha)\\&=\sin\alpha\cos\alpha(\cos n\alpha-\sin n\alpha)\\&\quad-\sin^2\alpha(\sin n\alpha+\cos n\alpha)\\&=\cos\alpha\left[x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n-\cos\alpha\left(x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}\right)\right]\end{aligned}$$

---

* 详细结论见附录 I．

$$-\sin^2\alpha\left(x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}\right),$$

也就是

$$x_{n+2}-\left(\frac{1}{2}+2\cos\alpha\right)x_{n+1}+(\cos\alpha+1)x_n-\frac{1}{2}x_{n-1}=0,$$

它的特征多项式为

$$x^3-\left(\frac{1}{2}+2\cos\alpha\right)x^2+(\cos\alpha+1)x-\frac{1}{2}$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-2\cos\alpha x+1),$$

特征根为 $\frac{1}{2}$, $\cos\alpha+i\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha-i\sin\alpha$.

设 $x_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2\cos n\alpha+c_3\sin n\alpha$, 再由 $x_0=0$ 及原方程求得

$$x_1=\sin\alpha+\cos\alpha,$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha.$$

解方程组

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ \frac{1}{2}c_1+c_2\cos\alpha+c_3\sin\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha, \\ \frac{1}{4}c_1+c_2\cos 2\alpha+c_3\sin 2\alpha \\ \quad =\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha, \end{cases}$$

得
$$c_1=-c_2=\frac{2\cos\alpha+2\sin\alpha-4}{5-4\cos\alpha},$$

$$c_3=\frac{2\sin\alpha-2\cos\alpha+4}{5-4\cos\alpha}.$$

因此,

$$a_n=\frac{2}{5-4\cos\alpha}\Big[(\cos\alpha+\sin\alpha-2)\Big(\frac{1}{2^n}-\cos n\alpha\Big)$$
$$+(\sin\alpha-\cos\alpha+2)\sin n\alpha\Big].$$

习 题 三

1．已知差分方程 $a_{n+1}+2a_n+a_{n-1}=\sin n\alpha\Big(\alpha$ 为常量，且 $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\Big)$.

(1) 验证：$a_n=\dfrac{\sin n\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ 是方程的一个解；

(2) 求方程在初始条件 $a_0=-1$，$a_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 下的解.

2．用定理 4 提供的方法解下列差分方程：

(1) $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+\lg\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)$，$a_1=0$，$a_2=1$；

(2) $a_{n+1}+a_{n-1}=\dfrac{2n}{n^2-1}$，$a_1=0$，$a_2=-\dfrac{1}{2}$.

3．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}=\dfrac{n-2}{n}$，$a_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{2}$；$\{b_n\}$ 满足 $b_n=b_{n-1}+\dfrac{1}{n(n-1)}$，$b_1=0$.

(1) 证明 $a_n=b_n$ 对任意自然数 n 成立；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

4．设 $F(k)=2^k(k+2)$，

(1) 计算 $\Delta F(k)$ 和 $\Delta^2F(k)$；

(2) 证明 $\Delta^mF(k)=2^k(k+2m+2)$.

5．已知 $f(n)=\sin nx$，

(1) 证明 $\Delta^2f(n)=-4\sin^2\dfrac{x}{2}\sin(n+1)x$；

(2) 试求 $|\Delta^{2k-1}f(n)|$ 和 $|\Delta^{2k}f(n)|$，并用数学归纳法证明.

6．证明：$\Delta^mf(k)=\sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^iC_m^if(k+m-i)$.

7．解下列差分方程：

(1) $a_n=4a_{n-1}+1$，$a_1=0$；

(2) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 12n - 12$, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$;

(3) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 30 - 9n$, $a_1 = -7$, $a_2 = 28$;

(4) $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + 2^n(n-1)$, $x_0 = x_1 = 0$;

(5) $x_{n+1} + x_n = \cos n\alpha$, α 为常量，$x_0 = 0$.

8. 某基金会有基金100万元存在银行里，计划每年年终取出10万元授青年奖学金．银行的年利率为8%．若不补充基金，该青年奖学金至多可以授多少年?

9. 一个公司招收甲、乙两种工人，起始工资都是每月100元．甲种工人每半个月发工资一次．从第二个月开始，每半个月增加工资1元；乙种工人每月发工资1次．第二个月开始，每个月增加工资3元．哪种工人的待遇高些?

10. 设 $N(2^m) = 2N(2^{m-1}) + 2^m - 1$, $N(1) = 0$．求 $N(2^m)$.

11. 设 λ, p_1, $\cdots$, p_k 为常数，且 $\lambda(\lambda-1)p_k \neq 0$．差分方程

$$a_n + p_1 a_{n-1} + \cdots + p_k a_{n-k} = \lambda^n g(n) \tag{4.9}$$

中，$g(n)$ 是 n 的 m 次多项式.

(1) 试证存在 $k+m+1$ 阶常系数线性齐次差分方程，使方程(4.9)在任何初始条件下的解都满足这个齐次方程;

(2) 写出方程(4.9)的解法.

五、差分方程与数列

这里有一个有趣的问题:

某班同学站成一列横队报数. 凡报到3的倍数的人自动出列. 报完后,剩下的人按原来的次序站好,重新报数. 问第二次报n的同学,前一次报的是多少?

要解答这个问题,我们自然要先找找两次报的数之间的关系.

前一次报的数成自然数列(事实上当然只能是有限多项),将其中3的倍数去掉后,成了数列

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots \tag{5.1}$$

将它的第n项记作a_n,也就是第二次报n的同学,前一次报的是a_n. 要写出a_n,我们很容易这样考虑:

数列(5.1)的所有奇数项和所有偶数项分别构成一个公差为3的等差数列*. 于是有$a_{2n-1}=3n-2$和$a_{2n}=3n-1$,所以,

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{3n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;}\\[2mm] \dfrac{3n-2}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

得到这个用n来表示a_n的形式,可以认为满意了. 但有时候,我们又会感到这个答案还有缺陷. 如,要以这个答案为中间过程,进一步计算或研究某些性质就不够方便. 再者,如

---

* 这两个数列都叫做数列(5.1)的"子列"(即由一个数列去掉一些项后余下的项组成的数列).

果在类似的问题中情况更复杂些，如数列

$$1, 3, 2, 5, 7, 6, 9, 11, 10, \cdots \tag{5.2}$$

用上面的方法，就必须分成三种情况表示．更何况我们还有可能会遇到比(5.2)还要复杂的数列．

现在，我们换一个途径去考虑．既然数列(5.1)的奇数项与偶数项都构成公差为3的子列，也就是说，每项都比它后面的第二项小3，就是

$$a_{n+2}=a_n+3. \tag{5.3}$$

将(5.3)看作数列(5.1)满足的差分方程，它的解法恰好在前一节中讲到过．我们便能不很困难地求得

$$a_n=-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}(-1)^n.$$

这正是我们所希望得到的$\{a_n\}$的通项公式．

从这里我们得到一个启发．当我们想直接写出一个数列的通项公式而有困难的时候，可以找找相邻项之间的关系．如果它们满足一个线性差分方程，我们就找到了一座桥梁，使数列和它的通项公式之间得以沟通．请读者也来试一试，用建立差分方程的方法，求数列(5.2)的通项公式．

数列(5.1)的求通项问题，我们还可以这样考虑：如果将所有偶数项都加上$\frac{1}{2}$，便得到等差数列

$$1,\ \frac{5}{2},\ 4,\ \frac{11}{2},\ 7,\ \frac{17}{2},\ \cdots$$

它的通项公式是$\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$．因此我们可以将a_n写成$\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$与另一个数列$0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\cdots$对应项之差的形式．

同样，数列(5.2)也可以写成等差数列$\left\{\frac{4}{3}n\right\}$与数列

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2, \cdots$$

对应项之和的形式.

因此，只要我们会求这种循环变化的数列的通项，那么(5.1)和(5.2)的求通项问题不是迎刃而解了么？我们通过下面的例题来研究这一类数列.

【例 1】 对于数列 $\{a_n\}$，如果存在正整数 m，使得

$$a_{n+m}=a_n \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{5.4}$$

成立，我们就说 $\{a_n\}$ 是周期的. 使(5.4)成立的最小正整数 m，称为 $\{a_n\}$ 的周期.

显然，下列两个数列都是周期的：

$$\left\{\sin\frac{2k n\pi}{m}\right\}, \left\{\cos\frac{2k n\pi}{m}\right\}, (k \text{ 为固定的正整数})$$

它们的周期是 m 的一个约数.（想一想，为什么？）

让 k 取不同的值，便会得到若干个数列. 这些数列各乘以一个任意选定的常数后，再加起来，得到的数列应仍是一个周期数列，并且它的周期仍是 m 的某个约数.（请读者自己证明.）

反过来，任何周期为 m 的数列，一定可以用这个方法得到它的通项公式. 这就是说，周期为 m 的数列 $\{a_n\}$，一定满足

$$a_n=\sum_{k=0}^{m-1}\left(c_k\sin\frac{2k n\pi}{m}+d_k\cos\frac{2k n\pi}{m}\right), \tag{5.5}$$

其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}$ 和 $d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}$ 都是常数. 我们来证明这一点.

(5.4)实际上是一个 m 阶常系数线性齐次差分方程，它的特征多项式为 x^m-1. 因此，(5.4)的特征根为

$$\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}. \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

按第三节的内容，差分方程(5.4)的任何一个解必可表示为

$$\sum_{k=0}^{m-1} b_k\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1} b_k\left(\cos\frac{2kn\pi}{m}+i\sin\frac{2kn\pi}{m}\right).$$

适当改写常数 $b_k(0\leqslant k\leqslant m-1)$，就可以表示为(5.5)的形式.

有了例1的结论，我们又有了一个求数列(5.1)和(5.2)通项公式的方法——写成一个等差数列加上一个周期数列的方法，另外，我们还可以很快地求出第二节例1中的差分方程的解.

事实上，数列的周期性问题更广泛地出现在“除以 m 的余数所构成的数列”这一类情况中. 例如，编制过计算机打印年历程序的读者，可能就处理过由0, 1, 2, 3, 4, 5, 6这七个数循环的情况. 因为日期的打印位置通常是由星期几所决定的.

1992 十二月 **12** DEC

SU日	M一	T二	W三	TH四	F五	S六
	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

例1还告诉我们，数列的周期性，可以用三角函数的周期性来表示. 其实，数列的许多性质，都能从差分方程中反映出来. 如有的数列，各项绝对值的大小都不超出一个确定的范围，我们把这种数列叫做有界数列. 严格地说，数列 $\{a_n\}$ 有界，就是指存在一个正数 M，使 $|a_n|\leqslant M$ 对任意自然数 n 成立. 前面讲到的周期数列就是有界的；公比的绝对值不大于1的等比数列也是有界的.

【例 2】 设数列 $\{a_n\}$ 满足差分方程

$$a_{n+2}=3ma_{n+1}-(2m^2-2m-1)a_n-m(2m+1)a_{n-1}, \tag{5.6}$$

证明：当 $-1<m\leqslant 0$ 时，$\{a_n\}$ 是有界数列.

证明 当 $-1<m<0$，且 $m\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，方程 (5.6) 的特征多项式为

$$x^3-3mx^2+(2m^2-2m-1)x+m(2m+1),$$

特征根为 -1，m，$2m+1$，且均为单根. 所以有

$$a_n=c_1(-1)^n+c_2m^n+c_3(2m+1)^n,$$

其中 c_1，c_2，c_3 为常数.

由于 $-1<m<0$，所以 $|m|<1$，$|2m+1|<1$. 于是

$$\begin{aligned}|a_n|&\leqslant|c_1(-1)^n|+|c_2m^n|+|c_3(2m+1)^n|\\&=|c_1|+|c_2|\cdot|m|^n+|c_3|\cdot|2m+1|^n\\&<|c_1|+|c_2|+|c_3|,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 有界.

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，(5.6)成为二阶方程

$$a_{n+2}=-\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n,$$

特征根为 -1 和 $-\dfrac{1}{2}$. 于是，$a_n=c_1(-1)^n+c_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$|a_n|\leqslant|c_1|+|c_2|\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<|c_1|+|c_2|,$$

所以 $\{a_n\}$ 也是有界的.

如果 $m=0$，则(5.6)恰好成为 $a_{n+2}=a_n$，说明 $\{a_n\}$ 是周期的，因而是有界的. 综上所述，不论 (5.6) 在什么初始条件下，只要 $-1<m\leqslant 0$，则以它的解 a_n 为通项的数列必定是有界的.

后面我们还将研究"两端无穷"数列的有界性.

【例 3】 任意两相邻项均异号的数列，我们称之为交错数列. 求使满足递推关系 $x_n=2x_{n-1}+3x_{n-2}+1$ 的实数列 $\{x_n\}$ 成为交错数列的初始条件.

解 我们先写出方程的通解. 按定理 4，可以先找出一个特解，并写出齐次方程 $y_n=2y_{n-1}+3y_{n-2}$ 的通解，再将 x_n 表成这二者之和的形式.

我们知道，若将原方程两边求差分，便成了一个有特征根 1，−1，3 的三阶齐次方程. 因此，按上一节的方法，在对初始值有限制条件 $x_3=2x_2+3x_1+1$ 的情况下，应有

$$x_n=c_1+c_2(-1)^n+c_3\cdot 3^n.$$

同时，注意到它减去方程 $y_n=2y_{n-1}+3y_{n-2}$ 的解 $y_n=c_2(-1)^n+c_3 3^n$ 后，仍是原方程的解，可见原方程应有常数特解.

设 $x_n=\lambda$ 是常数解，则 $\lambda=2\lambda+3\lambda+1$，因而 $\lambda=-\dfrac{1}{4}$ 是原方程的一个特解. 这样，原方程的通解便为

$$x_n=-\frac{1}{4}+c_1(-1)^n+c_2 3^n.\ (c_1,\ c_2 \text{为任意常数})$$

若 $c_2\neq 0$，则 $\{x_n\}$ 不可能是交错数列. 因为当 n 大于 $\log_3\left(\left|\dfrac{1}{4c_2}\right|+\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right|\right)$ 时，有

$$3^n>\left|\frac{1}{4c_2}\right|+\left|\frac{c_1}{c_2}\right|\geqslant\frac{1}{4c_2}-\frac{c_1}{c_2}(-1)^n,$$

也就有 $\dfrac{x_n}{c_2}=-\dfrac{1}{4c_2}+\dfrac{c_1}{c_2}(-1)^n+3^n>0$. 说明 x_n 与常数 c_2 同号. 因此，须有 $c_2=0$.

此时，$x_n=-\dfrac{1}{4}+c_1(-1)^n$，即 $\{x_n\}$ 是周期数列

$$-\frac{1}{4}-c_1,\ -\frac{1}{4}+c_1,\ -\frac{1}{4}-c_1,\ -\frac{1}{4}+c_1,\ \cdots$$

这样，我们就只需令

$$x_1x_2=\left(-\frac{1}{4}-c_1\right)\left(-\frac{1}{4}+c_1\right)=\frac{1}{16}-c_1^2<0,$$

即 $|c_1|>\frac{1}{4}$. 再由

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{4}-c_1+3c_2=x_1,\\ -\dfrac{1}{4}+c_1+9c_2=x_2,\end{cases}$$

可解得 $c_1=\frac{1}{4}\left(x_2-3x_1-\frac{1}{2}\right)$, $c_2=\frac{1}{12}\left(x_1+x_2+\frac{1}{2}\right)$, 所以应有 $x_1+x_2+\frac{1}{2}=0$ 及 $\left|x_2-3x_1-\frac{1}{2}\right|>1$. 即当 $x_1+x_2=-\frac{1}{2}$, 且 $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$ 时, $\{x_n\}$ 是交错数列.

【例 4】 已知

$$a_n=\frac{1}{5}(-1)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

求证：数列 $\{a_n\}$ 各项都是整数.

证明 注意到 a_n 的表达式中含有三个指数式，我们可以把它看作一个常系数线性齐次差分方程的解. 然后设法由方程本身来证明结论.

将 -1, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 看作差分方程的三个特征根，则由于它们都是单根，所以方程的特征多项式为

$$(x+1)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=x^3-2x^2-2x+1,$$

于是，a_n 满足的三阶常系数线性齐次差分方程为

$$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}-a_{n-3}. \tag{5.7}$$

再由 a_n 的表达式经过计算，得 $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$. 就是说，$\{a_n\}$ 是以方程(5.7)在初始条件 $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$ 下的解为通项公式的数列. 由于(5.7)右端各项系数均为整数，且只含加、减、乘运算，在 a_0, a_1, a_2 为整数的情况下，经过(5.7)推算出的 a_3, a_4, … 也全是整数(用数学归纳法能够毫不困难地证明这一点).

综上所述，$\{a_n\}$ 是一个整数列.

【例 5】 已知差分方程 $a_n=\sqrt{a_{n-1}+a_{n-2}}$ 的初始条件为 $a_0=a_1=1$.

(1) 证明：数列 a_1, a_2, a_3, … 是单调增加的有界数列；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 (1) 我们用数学归纳法证明结论.

(i) 当 $n=1, 2, 3$ 时，有

$$a_1=1,\ a_2=\sqrt{2},\ a_3=\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

所以 $2>a_3>a_2>a_1$ 成立.

(ii) 假设当 $n=k(k\geqslant 3)$时，$2>a_k>a_{k-1}>a_{k-2}$ 成立. 则当 $n=k+1$ 时，有

$$a_{k+1}-a_k=\sqrt{a_k+a_{k-1}}-\sqrt{a_{k-1}+a_{k-2}}$$

$$=\frac{a_k-a_{k-2}}{\sqrt{a_k+a_{k-1}}+\sqrt{a_{k-1}+a_{k-2}}}>0,$$

也就是 $a_{k+1}>a_k>a_{k-1}$.

而 $a_k<2$, $a_{k-1}<2$, 所以 $a_k+a_{k-1}<4$. 因而也就有

$$a_{k+1}=\sqrt{a_k+a_{k-1}}<2.$$

根据(i) 和 (ii)，我们说，$\{a_n\}$ 是单调增加且有界($1\leqslant a_n<2$)的数列.

(2) 按照“单调有界的数列必存在极限”的结论，我们设 $\{a_n\}$ 的极限为 λ，则

$$\lambda^2=(\lim_{n\to\infty}a_n)^2=\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}+\lim_{n\to\infty}a_{n-2}=\lambda+\lambda=2\lambda.$$

解这个关于 λ 的方程，并去掉根 $\lambda=0$，得 $\lambda=2$. 即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

求由差分方程定义的数列的极限，例 5 的方法是一种常用的方法. 用这个方法求极限，通常要先证明极限的存在性.

若要用这个办法来解第一节的例 1，就行不通了. 我们如果设 $\lambda=\lim_{n\to\infty}x_n$，对 $x_n=\frac{1}{3}(x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3})$ 两边求极限，得到的是 $\lambda=\frac{1}{3}(\lambda+\lambda+\lambda)$ 是一个恒等式，仍不知道 λ 是什么. 现在，我们用下面的方法解这个例题.

前面我们已经把 A_n 的坐标表示为 (x_n, y_n) 了. $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 又分别满足差分方程

$$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}}{3} \quad 和 \quad y_n=\frac{y_{n-1}+y_{n-2}+y_{n-3}}{3},$$

两个方程实际上是一样的，我们只需来解前一个. 这个三阶线性方程的特征根为 1，$\frac{-1\pm\sqrt{2}\,i}{3}$.

令 θ 为 $\frac{-1+\sqrt{2}\,i}{3}$ 的辐角主值，则三个特征根又可写成 1，$\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta\pm i\sin\theta)$. 按第三节例 4 的讨论结果，我们可以设

$$x_n=c_1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n(c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta).$$

因为 $c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta$ 有界，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n=0$，所以

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n(c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta)\to 0,\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时})$$

因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c_1$. 又由于

$$\begin{cases} c_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(c_2\cos\theta+c_3\sin\theta)=x_1, & ①\\ c_1+\dfrac{1}{3}(c_2\cos 2\theta+c_3\sin 2\theta)=x_2, & ②\\ c_1+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}(c_2\cos 3\theta+c_3\sin 3\theta)=x_3, & ③\end{cases}$$

将 ① 加上 ③ 的 3 倍，再减去 $2\sqrt{3}\cos\theta$ 与 ② 的乘积，便得到

$$c_1=\frac{x_1+3x_3-2\sqrt{3}\cos\theta\, x_2}{4-2\sqrt{3}\cos\theta}.$$

但 $\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta=-\frac{1}{3}$，所以，$c_1=\frac{x_1+2x_2+3x_3}{6}$. 也就是说

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{x_1+2x_2+3x_3}{6}.$$

同理，

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{y_1+2y_2+3y_3}{6}.$$

这样得到 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+2x_2+3x_3}{6},\ \frac{y_1+2y_2+3y_3}{6}\right)$.

后面我们还将看到这个例题的一个推广.

通常我们所说的无穷数列是有开始的一个数的. 有时我们也需要研究"向两端延伸的数列". 如果从函数的观点来说，就是一个定义在整数集合 Z 上的函数. 例如我们要列举所有余弦为零的角，常可写成

$$\cdots,\ -n\pi+\frac{\pi}{2},\ \cdots,\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \cdots,\ n\pi+\frac{\pi}{2},\ \cdots$$

又如，放射性元素镭每经过100年衰变，含量就会减少约4.24%．若将现在的质量记作1单位，经过k年的衰变，剩下的应有

$$M_k=(1-4.24\%)^{\frac{k}{100}}.$$

这个公式当$k\leqslant 0$时也是正确的．换言之，k年前所含镭的质量为

$$M_{-k}=(1-4.24\%)^{\frac{-k}{100}}.$$

像这样的数列，我们把它叫做一个两端无穷数列．反映在数列的递推形式上，就不仅需要能由已知的若干连续项推算出后一项，也要能"反向"地逆推出前一项．以斐波那契数列为例，当我们把方程(1.1)改写为$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$时，便能写出$F_0=0$, $F_{-1}=1$, $F_{-2}=-1$, $F_{-3}=2$, … 就得到了一个两端无穷数列：

$$\cdots,\ F_{-n},\ \cdots,\ F_{-1},\ F_0,\ F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n,\ \cdots$$

这样的数列仍保持着一定的规律性．如果你有兴趣，可以找找F_n与F_{-n}之间的关系，并加以证明．

实际上，许多具有初始条件的差分方程都可以定义一个两端无穷的数列．例如，任何一个常系数线性齐次差分方程都可以做到．因为一般地，我们可以将方程(3.1)变形为

$$a_{n-k}=-\frac{1}{p_k}a_n-\frac{p_1}{p_k}a_{n-1}-\cdots-\frac{p_{k-1}}{p_k}a_{n-k+1}, \qquad (5.8)$$

便可以进行"反向"的推算了．

要研究用差分方程定义的两端无穷数列$\{a_n\}$具有什么性质，常常是先考察$n>0$(或$n\geqslant 0$)时数列的性质，再对$n<0$的情况作出补充讨论．例如：

满足差分方程$a_{n+k}=a_n$(k为固定的正整数)的数列$\{a_n\}$在$-\infty<n<+\infty$上是否有界？我们知道，由于$\{a_n\}$是周期的，所以对任何初始条件，a_1, a_2, a_3, … 都是有界的．当$n\leqslant$

0 时，将方程写成 $a_{-n}=a_{-n+k}$，可见周期性依然成立，因此 a_0，a_{-1}，a_{-2}，… 也是有界的．这样就可以知道 $\{a_n\}(-\infty<n<+\infty)$是有界的．

又如，要讨论斐波那契数列 $\{F_n\}$，在像上面讲的那样扩展为两端无穷数列后，单调性如何？我们可以从 $F_1=F_2=1$ 及 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 中得出，从 $n=2$ 起有 $F_{n+1}-F_n=F_{n-1}>0$，即 $F_{n+1}>F_n$．所以当 $n>1$ 时，$\{F_n\}$ 单调增．但当 $n\leqslant1$ 时，由于 $F_{-1}=1>0=F_0$，所以在 $-\infty<n<\infty$ 上，$\{F_n\}$ 却不是单调的．

附录 I 的最后有一个结论，也是按以上的讨论方法得出的．这个结论是：满足某个常系数线性齐次差分方程的所有两端无穷数列 $\{a_n\}$ 有界，当且仅当这个方程的特征根都是绝对值为 1 的单根．

【例 6】 (1) 设 a, b 是两个实数，且 $b\neq0$．如果满足差分方程

$$x_{n+1}+ax_n+bx_{n-1}=0 \tag{5.9}$$

的任何两端无穷数列 $\{x_n\}$ 都有界，讨论 a, b 应满足的条件；

(2) 若 a, b 是两个复数时，以上讨论的结果应作怎样的推广？

解 (1) 由上所述，当且仅当方程 $x^2+ax+b=0$ 两个根都是绝对值为 1 的单根时，$\{x_n\}(-\infty<n<\infty)$一定有界．我们设两个根为 λ_1 和 λ_2．

由 $|b|=|\lambda_1\lambda_2|=|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|=1$ 可知，$b=\pm1$．当 $b=-1$ 时，由于 $a^2-4b>0$，λ_1、λ_2 都是实数．所以它们只能一个是 1，另一个是 -1．因此 $a=-(\lambda_1+\lambda_2)=0$．也就是说，$\{x_n\}$ 满足方程 $x_{n+1}=x_{n-1}$，是周期数列，当然也应是有界的了．

当 $b=1$ 时，λ_1，λ_2 只能是互为共轭的两虚数．将它们表

示为 $\lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $\lambda_2=\cos\theta-i\sin\theta$, 则 $-a=\lambda_1+\lambda_2=2\cos\theta$. 而 $\theta\neq k\pi$(k 为整数), 否则 λ_1、λ_2 相等, 因此 $|a|<2$. 反之, 若 $b=1$, $|a|<2$, 则 $a^2-4b<0$, 说明两根 λ_1, λ_2 是两个互为共轭的虚数. 将它们记作 $\lambda_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\lambda_2=r(\cos\theta-i\sin\theta)$, 由于 $\lambda_1\lambda_2=b=1$, 即 $r^2=1$, 有 $r=1$. 这样, $\{x_n\}$ 一定有界.

综上所述, 满足方程(5.9)的任何两端无穷数列 $\{x_n\}$ 都有界的充要条件是 $a=0$, $b=-1$ 或 $b=1$, $|a|<2$.

(2) 当 a, b 中有虚数时, $\{x_n\}$ 是一个复数序列. 由于在复数范围内, 实数的四则运算及乘方运算法则、公式仍能成立, 所以解常系数线性齐次差分方程的整套方法仍然适用.

我们还是从附录 I 的结论出发. 设 λ_1, λ_2 是方程 $x+ax+b=0$ 的两个绝对值为 1 的单根, 将 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 记作 $\cos\theta+i\sin\theta$,

于是
$$\frac{a^2}{b}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2}=2+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=2+2\cos\theta$$

是实数. 由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $\cos\theta\neq1$. 因而 $0\leqslant2+2\cos\theta<4$, 即 $0\leqslant\frac{a^2}{b}<4$. 而 $|b|=|\lambda_1\lambda_2|=|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|=1$.

反之, 若 $\frac{a^2}{b}$ 是实数, 且 $0\leqslant\frac{a^2}{b}<4$, 我们设两根 λ_1, λ_2 满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 由于

$$\frac{a^2}{b}=2+r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta),$$

即 $\frac{a^2}{b}=2+\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$ 是实数, 说明 $r-\frac{1}{r}=0$ 或 $\sin\theta=0$.

若 $r-\frac{1}{r}=0$，则 $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|=r=1$，即 $|\lambda_1|=|\lambda_2|$. 但 $|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|=|b|=1$，因此有 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$；若 $\sin\theta=0$，则 $\cos\theta=\pm1$. 此时，仅当 $r=1$，$\cos\theta=-1$ 时，$0\leqslant2+\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta<4$ 成立. 同样可以证得 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$. 而 $\frac{a^2}{b}\neq4$，所以又有 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

这就是说，在 a, b 是复数的情况下，当且仅当 $\frac{a^2}{b}$ 是实数，$0\leqslant\frac{a^2}{b}<4$，且 $|b|=1$ 时，$\{x_n\}(-\infty<n<\infty)$ 一定有界. 我们可以看到，(1)的结论正是(2)的一个特例.

习 题 四

1. 求下列各数列的通项公式：

(1) 1, 3, 2, 5, 7, 6, 9, 11, 10, …

(2) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, …

(3) 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, …

(4) $a_n=\begin{cases}0 & \text{当 } k\nmid n \text{ 时；}\\ 1 & \text{当 } k\mid n \text{ 时.}\end{cases}$

其中 k 是固定的正整数.

2. 设 $a_n=\sin\frac{2nk\pi}{m}$. 证明 $\{a_n\}$ 是周期数列，且它的周期是 m 的约数(k, m 是两个正整数).

3. 用两种方法证明，满足 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$ 的数列 $\{a_n\}$ 是周期的.

4. 已知 $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$, $a_1=0$, $a_2=-2$; $b_n=-b_{n-1}+2b_{n-2}$, $b_1=0$, $b_2=2$. 求证：$\{a_n\}$ 是 $\{b_n\}$ 的子列.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足方程 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}-a_{n-4}$. 证明 $\{a_n\}$ 是有界的.（甚至当 $\{a_n\}$ 是两端无穷数列时结论也成立.）

6. 满足 $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ 的数列 $\{a_n\}$ 从第 4 项起都是负值，而前三项非负. 求前两项之比的范围.

7. 已知正整数 a_0 和 a_1 满足 $a_0<a_1$，若 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n=1, 2, \cdots)$，求证：$a_{100}\geqslant 2^{100}$。

8. 若 $\{a_n\}$ 满足常系数线性齐次差分方程 $a_{n+1}+pa_n+qa_{n-1}=0$，$b_n=a_{2n-1}(n\geqslant 1)$。写出 $\{b_n\}$ 满足的二阶常系数线性齐次差分方程。

9. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别满足 $x_{n+1}=8x_n-12x_{n-1}$，$x_0=-1$，$x_1=2$；$y_{n+1}=4y_n-3y_{n-1}$，$y_0=3$，$y_1=5$。求证：对任意自然数 n，x_n 与 y_n 互质。

10. 证明：对任意整数 n，$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 是整数。

11. 证明：由 $a_n=\frac{2a_{n-1}^2-3a_{n-1}-9}{2a_{n-2}}$ 及 $a_0=1$，$a_1=5$ 确定的数列 $\{a_n\}$ 各项都是整数。

12. 求满足下列条件的数列 $\{a_n\}$ 的极限：

(1) $a_1=8$，$a_2=27$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}\,(n\geqslant 3)$；

(2) $a_1=\alpha$，$a_2=\beta$，$a_n=\frac{ma_{n-1}+ka_{n-2}}{m+k}\,(n\geqslant 3)$，其中 m，k 均为正数；

(3) $a_1=5$，$a_2=4$，$a_3=3$，$a_n=\frac{5a_{n-1}-2a_{n-2}+a_{n-3}}{4}\,(n\geqslant 4)$。

13. 设数列 $\{a_n\}(n\geqslant 0)$ 满足常系数线性齐次差分方程 (3.1)。我们按(5.8)将它扩展为一个两端无穷数列。证明：当 $n<0$ 时，这个数列的各项 a_{-1}，a_{-2}，$\cdots$，满足一个以(3.1)的特征根的倒数为全部特征根的常系数线性齐次差分方程。

六、求　和

求和是数学中的一个十分普遍的问题．最简单的求和公式可以说是等差数列和等比数列的求和公式．它们分别为：

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d \quad (d\text{为公差}) \tag{6.1}$$

和

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \quad (q\text{为公比},q\neq1) \tag{6.2}$$

现在，我们来研究差分方程与求和的关系，尤其是怎样用差分方程来解决求和问题．

前面的内容中，曾定义了差分．差分与求和有着特别重要的关系．以等差数列为例，我们根据等差数列的通项公式(1.10)可以看出，当公差 d 不为零时，它表示为 n 的一个一次多项式．而前 n 项和 S_n 表示为一个 n 的二次多项式．我们知道，n 的二次多项式的一阶差分正是 n 的一次多项式．注意到这种关系并一般地考虑这个问题，我们会发现，求差分正是由 S_n 求 a_n 的途径．即：

$$\begin{aligned}a_n&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\\&=S_n-S_{n-1}=\Delta S_{n-1}.\end{aligned}$$

显然，这个关系式本身与 $\{a_n\}$ 是否是等差数列并没有关系．它是一个体现了求和与求差分关系的一般表达式．完整地描述这个关系，就是：

设 $f(n)$ 是一个整变量函数，

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n),$$

则有 $f(n)=\Delta S(n-1)$. 为使 $f(1)=\Delta S(0)=S(1)-S(0)$ 也成立，应有 $S(0)=0$.

我们还可以将这个关系记作

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} \Delta S(k-1),\ S(0)=0. \qquad (6.3)$$

这是一个很有用的表达式. 首先它表明，求和是求差分的逆运算. 因此，有时我们也将 $S(n)$ 叫做 $f(k)=\Delta S(k-1)$ 的"和分". 在实际应用上，它还给我们提供了一个求和的方法：这就是要求出 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$，只要设法将 $f(k)$ 表成一个 k 的函数 $S(k-1)$ 的一阶差分 $\Delta S(k-1)$，而且 $S(0)=0$，则所求的和便是 $S(n)$ 了.

【例 1】 求 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$.

解 将 $k(k+1)$ 记作 $f(k)$. 要将 $f(k)$ 表示为另一个函数的一阶差分，我们可以先想一想，这个函数应该具有什么形式. 我们知道，三次多项式的一阶差分是二次多项式，那么反过来，我们要找的函数是否应该是一个三次多项式呢？

我们设 $S(k)=ak^3+bk^2+ck+d$，则

$$\begin{aligned}\Delta S(k-1)&=ak^3+bk^2+ck+d\\&\quad-[a(k-1)^3+b(k-1)^2+c(k-1)+d]\\&=3ak^2-3ak+a+2bk-b+c\\&=3ak^2+(2b-3a)k+(a-b+c).\end{aligned}$$

令 $f(k)=\Delta S(k-1)$，即

$$3ak^2+(2b-3a)k+(a-b+c)=k^2+k,$$

则有
$$\begin{cases}3a=1,\\2b-3a=1,\\a-b+c=0,\end{cases}$$
从而得到 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$, 而 $d=S(0)=0$, 于是有
$$S(k)=\frac{1}{3}k^3+k^2+\frac{2}{3}k,$$
这样，
$$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$$
$$=S(n)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n.$$

例 1 中的求和方法并不麻烦，但关键在于怎样由 $f(k)$ 找到 $S(k)$，使 $f(k)=\Delta S(k-1)$. 而就 $f(k)$ 是多项式的情况而言，可以说这个问题已经完全解决了. 因为附录 II 中的引理 3 告诉我们，$\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 是一个比 $f(n)$ 高一次的 n 的多项式. 从理论上，我们总可以像例 1 那样，通过解方程组确定多项式 $S(k)$ 的各项系数，进而求得 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$.

当 $S(0)\neq0$ 时，对(6.3)需要作一点修改，得到更一般的表达式，这就是
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\Delta S(k-1)+S(0). \tag{6.4}$$

【例 2】 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k}$.

解
$$\frac{1}{k^2+3k}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\Delta\frac{1}{k} + \Delta\frac{1}{k+1} + \Delta\frac{1}{k+2}\right),$$

所以,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta\frac{1}{k} + \Delta\frac{1}{k+1} + \Delta\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\Delta\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}\Delta\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{11}{18} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right).$$

【例 3】 求 $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x$.

解 $\cos(2k-1)x$ 不易写成差分形式. 但

$$\cos(2k-1)x\sin x = \frac{1}{2}[\sin 2kx - \sin(2k-2)x]$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\sin(2k-2)x,$$

因此,

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \sum_{k=1}^{n}2\sin x\cos(2k-1)x$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Delta\sin(2k-2)x$$

$$= \sin 2nx - \sin 0 = \sin 2nx.$$

这样就有

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}. \quad (6.5)$$

如果 $S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$的极限存在, 我们把它记作

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k). \tag{6.6}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$也常常写成

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + \cdots \tag{6.7}$$

我们还可以把它叫做一个级数. 如果把 $f(1)$, $f(2)$, …, $f(k)$, … 看作一个数列, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 就是数列"所有各项的和".

【例 1】 (1) 写出 $\sum_{k=1}^{n} \Delta^2 f(k)$的一般形式;

(2) 求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \Delta^2 f(k) &= \sum_{k=1}^{n} [\Delta f(k+1) - \Delta f(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Delta f(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) \\ &= f(n+2) - f(2) - f(n+1) + f(1),\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta^2 f(k) = f(n+2) - f(n+1) - f(2) + f(1). \tag{6.8}$$

(2) 按前一小题的结论(6.8), 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Delta^2 \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{4}.$$

以上几个求和问题的例子，都是利用差分与求和的关系来解决的．以下的两个命题，建立了差分方程与求和、求乘积之间的关系，给求和问题的解决开辟了一条十分有特色的途径．

命题 6.1 求和：

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

与解差分方程 $S(n)=S(n-1)+f(n)$, $S(0)=0$ 是同一个问题．

命题 6.2 求乘积：

$$T(n)=\prod_{k=1}^{n}f(k)=f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)$$

与解差分方程 $T(n)=f(n)T(n-1)$, $T(0)=1$ 是同一个问题．*

对命题 6.1，我们只需把差分方程改写成 $\Delta S(n-1)=f(n)$，便可以由(6.3)得出其正确性．而对命题 6.2，要验证乘积 $T(n)$满足差分方程是很容易的，读者可以把这当作一个练习；反之，由 $T(n)=f(n)T(n-1)$ 和 $T(0)=1$ 应用归纳法，有

$$T(n)=f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n).$$

命题 6.1 可帮助我们解释许多问题．如(6.1)式和(6.2)式为什么正是差分方程 $S(n)=S(n-1)+[a_1+(n-1)\cdot d]$ 和

* 这里所谓"是同一个问题"，指的是有相同的结果．

$S(n)=S(n-1)+a_1q^{n-1}$ 的解, 等等.

至于命题 6.2, 首先就可以用来说明等比数列与它的通项公式之间的关系. 还有, 差分方程 $a_n=na_{n-1}$, $a_1=1$ 的解, 也可以由命题 6.2 直接得到, 为 $a_n=n!$. (什么原因?)

【例 5】 解差分方程 $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}-\sin 2n\alpha$ (α 为常量, 且 $\alpha\neq k\pi$, k 是整数), $a_0=a_1=0$.

解 这个类型的方程, 若用第四节例 7 的方法解, 过程就比较复杂. 我们考虑如何用求和方法来解.

将方程写成 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}-\sin 2n\alpha$, 并设 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 则方程变为

$$b_n=b_{n-1}-\sin 2n\alpha,\ b_0=0.$$

由命题 6.1,

$$\begin{aligned}b_n=\sum_{k=1}^{n}(-\sin 2k\alpha)&=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}(-2\sin\alpha\sin 2k\alpha)\\&=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}[\cos(2k+1)\alpha\\&\quad-\cos(2k-1)\alpha]\\&=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}\Delta\cos(2k-1)\alpha\\&=\frac{1}{2\sin\alpha}[\cos(2n+1)\alpha-\cos\alpha],\end{aligned}$$

即
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2\sin\alpha}[\cos(2n+1)\alpha-\cos\alpha].$$

再次根据命题 6.1, 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}[\cos(2k-1)\alpha-\cos\alpha]+a_0\\&=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\alpha-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\alpha,\end{aligned}$$

再由例 3 的(6.5), $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\alpha=\dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$, 因此,

$$a_n=\frac{\sin 2n\alpha}{4\sin^2\alpha}-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

我们知道，组合数 C_n^m 有以下两个重要的性质：

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$，这里，$0\leqslant m\leqslant n$.

为方便起见，我们补充规定，当 $m>n$ 或 $m<0$ 时，$C_n^m=0$. 显然这样作与组合数的定义并不矛盾，而且不难验证，以上两条性质对任意整数 m 成立.

【例 6】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{n+m}{n}a_{n-1}$（$m$ 是一个固定的正整数），$a_0=1$. 求：$\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$.

解 根据命题 6.2,

$$a_n=\frac{n+m}{n}\cdot\frac{n+m-1}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{m+1}{1}\cdot a_0$$

$$=\frac{(n+m)!}{n!\,m!}=C_{n+m}^m.$$

又
$$a_k=C_{k+m}^m=C_{k+1+m}^{m+1}-C_{k+m}^{m+1}=\Delta C_{k+m}^{m+1},$$

所以
$$\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}\Delta C_{k+m}^{m+1}=C_{n+1+m}^{m+1}-C_m^{m+1}=C_{n+m+1}^{m+1}.$$

事实上，我们不仅可以像例 5、例 6 那样，利用两个命题来解差分方程，而且更可以将许多求和问题转化为解差分方程来完成. 下面分几种类型讨论差分方程的这一应用.

(1) 形如 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^k f(k)$（$f(k)$是 k 的多项式）的求和.

设 $f(k)$是一个 k 的 m 次多项式，λ 是非零常数，我们可以用建立差分方程的方法来求和：

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^k f(k). \tag{6.9}$$

【例 7】 求 $3+3^2\cdot2^2+3^3\cdot3^2+\cdots+3^n\cdot n^2$.

解　设 $x_n=3+3^2\cdot2^2+3^3\cdot3^2+\cdots+3^n\cdot n^2$，则有

$$x_n=x_{n-1}+3^n n^2,\ 及\ x_0=3^0\cdot0^2=0.$$

在第四节中，曾讨论过这种常系数线性差分方程的解法．将它转化为齐次方程后，特征根应为 1 和三重根 3．于是，我们设 $x_n=c_0+3^n(c_1+c_2n+c_3n^2)$．再由 $x_0=0$，$x_1=3$，$x_2=39$，$x_3=282$，得到

$$\begin{cases}c_0+c_1=0,\\ c_0+3(c_1+c_2+c_3)=3,\\ c_0+9(c_1+2c_2+4c_3)=39,\\ c_0+27(c_1+3c_2+9c_3)=282.\end{cases}$$

解这个线性方程组，得 $c_0=c_2=-\dfrac{3}{2}$，$c_1=c_3=\dfrac{3}{2}$．因此，

$$\begin{aligned}&3+3^2\cdot2^2+3^3\cdot3^2+\cdots+3^n\cdot n^2\\&=-\frac{3}{2}+3^n\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}n^2\right).\end{aligned}$$

一般地，对于形如 (6.9) 的求和，我们总可以先将它转化为解差分方程

$$x_n=x_{n-1}+\lambda^n f(n),\tag{6.10}$$

再仿照例 7 去解方程，问题便解决了．特别地，当 $\lambda=1$ 时，(6.9)就成为对 k 的一个多项式求和．这时，上述方法依然有效．读者不妨以例 1 为例，试一试这个方法．

(2) 含有三角函数的求和．

【例 8】　求 $\cos\theta+2\cos2\theta+2^2\cos3\theta+\cdots+2^{n-1}\cos n\theta$ (θ 是一个常量)．

解　设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2^{k-1}\cos k\theta$，则 $x_n-x_{n-1}=2^{n-1}\cos n\theta$．

$$\begin{aligned}(x_n-x_{n-1})+4(x_{n-2}-x_{n-3})&=2^{n-1}[\cos n\theta+\cos(n-2)\theta]\\&=2^n\cos(n-1)\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$=4\cos\theta\cdot 2^{n-2}\cos(n-1)\theta=4\cos\theta(x_{n-1}-x_{n-2}),$$

即 $(x_n-x_{n-1})-4\cos\theta(x_{n-1}-x_{n-2})+4(x_{n-2}-x_{n-3})=0.$

这个齐次方程的特征多项式为

$$(x^3-x^2)-4\cos\theta(x^2-x)+4(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-4\cos\theta x+4),$$

因此，特征根为 $1,\ 2(\cos\theta+i\sin\theta),\ 2(\cos\theta-i\sin\theta).$

设 $x_n=c_0+2^n(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta)$，为使解关于 $c_0,\ c_1,\ c_2$ 的线性方程组较简便，我们将 x_n 写成

$$x_n=-\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}2^{k-1}\cos k\theta.$$

这样便有 $x_0=0,\ x_1=\cos\theta,\ x_2=\cos\theta+2\cos 2\theta$. 再由

$$\begin{cases}c_0+c_1=0,\\ c_0+2(c_1\cos\theta+c_2\sin\theta)=\cos\theta,\\ c_0+4(c_1\cos 2\theta+c_2\sin 2\theta)=\cos\theta+2\cos 2\theta,\end{cases}$$

解得 $c_0=\dfrac{\cos\theta-2}{5-4\cos\theta},\ c_1=\dfrac{2-\cos\theta}{5-4\cos\theta},\ c_2=\dfrac{\sin\theta}{5-4\cos\theta}.$

所以，

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cos k\theta=\frac{1}{5-4\cos\theta}[(\cos\theta-2)(1-2^n\cos n\theta)$$
$$+2^n\sin\theta\sin n\theta].$$

【例 9】 求 $\sin\alpha+2\sin 2\alpha+3\sin 3\alpha+\cdots+n\sin n\alpha\left(\alpha\text{ 是常量，且 }\dfrac{\alpha}{\pi}\text{ 不是整数}\right).$

解 对这个问题，如果去解差分方程 $x_n=x_{n-1}+n\sin n\alpha$ 就十分麻烦，我们可以通过对复数求和的方法达到目的．过程是这样：

令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，则由于

$$z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+2(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2+\cdots$$
$$+n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+\cdots$$
$$+n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$
$$=(\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cdots+n\cos n\alpha)$$
$$+i(\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\cdots+n\sin n\alpha).$$

只要求出 $\sum_{k=1}^{n} kz^k$ 的虚部，就是我们所需要的结果了。

令 $a_n=\sum_{k=1}^{n} kz^k$，则 $a_n=a_{n-1}+nz^n$，$a_1=z$.

解这个差分方程，得 $a_n=\dfrac{nz^{n+1}}{z-1}+\dfrac{z-z^{n+1}}{(z-1)^2}$，也就是

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k=\frac{nz^{n+1}}{z-1}+\frac{z(1-z^n)}{(z-1)^2}=\frac{nz^{n+1}(z-1)+z(1-z^n)}{(z-1)^2}.$$

由于 $(z-1)^2=(\cos\alpha+i\sin\alpha-1)^2=2(\cos\alpha-1)z$，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k=\frac{nz^n(z-1)+1-z^n}{2(\cos\alpha-1)}=\frac{nz^{n+1}-(n+1)z^n+1}{2(\cos\alpha-1)}$$
$$=\frac{n[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha]}{2(\cos\alpha-1)}$$
$$-\frac{(n+1)(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)-1}{2(\cos\alpha-1)},$$

所以，
$$\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\cdots+n\sin n\alpha$$
$$=\frac{n\sin(n+1)\alpha-(n+1)\sin n\alpha}{2(\cos\alpha-1)}.$$

现在，我们已经看到了三种解决含有正弦或余弦函数的求和问题的办法：

1. 差分方法，如前面的例 3；
2. 用差分方程直接求解，如例 8；
3. 转化为形如 $\sum f(k)z^k$ 的求和，如例 9。

(3) 含有组合数的求和.

含有组合数的求和问题，读者可能并不陌生．在中学教材中就有用二项式定理解决这类问题的习题．如

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n;$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0;$$

$$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=3^n$$

等等，它们都可以直接应用二项式定理得出．但下面的例子却不那么简单．我们试用差分方程来求解．

【例 10】 求 $C_n^0+2\cdot 2C_n^1+3\cdot 2^2C_n^2+\cdots+(n+1)2^nC_n^n$.

解 设 $a_n=C_n^0+2\cdot 2C_n^1+3\cdot 2^2C_n^2+\cdots+(n+1)2^nC_n^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^kC_n^k,$$

则

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^kC_{n-1}^k+\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^kC_{n-1}^{k-1}$$

$$=a_{n-1}+2\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}C_{n-1}^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}C_{n-1}^{k-1}\right)$$

$$=a_{n-1}+2(a_{n-1}+3^{n-1})=3a_{n-1}+2\cdot 3^{n-1}.$$

解差分方程 $a_n=3a_{n-1}+2\cdot 3^{n-1}$, 及 $a_0=C_n^0=1$, 得

$$a_n=3^{n-1}(3+2n),$$

也就是

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^kC_n^k=3^{n-1}(3+2n).$$

如果我们把这个例子与前几个例题作出比较，就会发现在建立差分方程上是有所区别的．前面几例，都是依据命题 6.1 建立方程的．而例 10 则是使用了组合数的性质，直接由 $n+1$ 项和与 n 项和之间的关系得到方程的．一般地，设 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是一个数列，要求和

$$x_0C_n^0+x_1C_n^1+x_2C_n^2+\cdots+x_nC_n^n, \qquad (6.11)$$

常常可以考虑用例10的方法建立差分方程求解．特别是当 x_k 形如 $\lambda^k f(k)$（λ 为常数，$f(k)$是 k 的多项式；$k=0, 1, \cdots, n$）时，这是个很有效的方法．在某些情况下，例如 $\{x_n\}$ 为 1, 0, 0, 1, 0, 0, $\cdots$ 时，还要用建立差分方程组的方法．在第九节中，我们将看到这样的例题．如果你把二项式定理也看作一个求和问题，用上述方法会很快地证明这个定理哩．

习　题　五

1. 设 S_n 为数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的前 n 项和．求证：

(1) $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_{n+1}=2S_n-S_{n-1}+d \Leftrightarrow S_{n+2}=3S_{n+1}-3S_n+S_{n-1}(n\geqslant 1)$，其中 d 为常数（公差）；

(2) $\{a_n\}$ 为等比数列 $\Leftrightarrow S_n=(1+q)S_{n-1}-qS_{n-2}(n\geqslant 2)$，其中 q 为非零常数（公比）．

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=3S_{n-1}-2S_{n-2}+1$，$S_1=1$．求 a_n 和 S_n．

3. 求 $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2-1}$．

4. （第18届国际中学生数学竞赛题）求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{1+k+k^2}$．$\left(\text{提示：计算 } \Delta\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{k}.\right)$

5. （1984年美国大学生数学竞赛题）设 n 为一正整数，$f(n)=1!+2!+\cdots+n!$．求满足 $f(n+2)=P(n)f(n+1)+Q(n)f(n)$ 的多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$．（提示：找出 $\Delta f(n+1)$ 与 $\Delta f(n)$ 的关系．）

6. 求和：

(1) $\sum\limits_{k=r}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$；　(2) $\sum\limits_{k=r}^{n}k!\cdot k$；　(3) $\sum\limits_{k=r}^{n}\dfrac{1}{k!(k+2)}$；

(4) $\sum\limits_{k=r}^{n}\dfrac{1}{C_{m+k}^{k}}$；$\left(\text{提示：计算 } \Delta\dfrac{1}{C_{m+k-1}^{m-1}}.\right)$

(5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{1+x^{2^k}}$；$\left(\text{提示：计算 } \Delta\dfrac{2^k}{1-x^{2^k}}.\right)$

(6) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}$.（提示：计算 $\Delta\operatorname{tg}kx$.）

7. 证明无穷乘积 $2^{\frac{1}{4}}\cdot4^{\frac{1}{8}}\cdot8^{\frac{1}{16}}\cdot16^{\frac{1}{32}}\cdots=2$.

8. 求和：

(1) $\sum_{k=0}^{n}k^3(k+1)$;　　(2) $\sum_{k=1}^{n}2^kk^2$;

(3) $\sum_{k=1}^{3^n-1}[\log_3 k]$; *　　(4) $\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]$.

9. 设 $f(k)$ 为 k 的 m 次多项式，λ 是常数，且 $\lambda(\lambda-1)\neq0$. 求证：
$\sum_{k=0}^{n}\lambda^kf(k)=c_0+\lambda^n(c_1+c_2n+c_3n^2+\cdots+c_{m+1}n^m)$，其中 c_0, c_1, c_2, …, c_{m+1} 是常数.

10. 数列 0, 1, 1, 2, 2, … 的第 n 项为

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{若 } n \text{ 为偶数;}\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{若 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

令 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$. 证明对任意两个自然数 x, y，有

$$xy=f(x+y)-f(|x-y|).$$

11. 我们将第五节的数列(5.1)记作 $\{a_n\}$. 求 $\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\alpha$.

12. 求 $\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$.

13. 已知 $f(k)=f(k-1)+k^2C_n^k$, $f(0)=0$. 求 $f(n)$.（提示：$nC_{n-1}^{k-1}=kC_n^k$.）

14. 用递推方法证明二项式定理.

15. 求和：

(1) $\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}C_n^k$;　　(2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)C_n^k$;

(3) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$; $(m\leqslant n)$　　(4) $\sum_{k=0}^{n}2^kC_{n-k}^k$.

---

* $[x]$表示不大于 x 的最大整数，详见下一节有关内容.

七、再谈斐波那契数列

在前面几节中，我们已经掌握了研究常系数线性差分方程的一些方法，也弄清了斐波那契数列的通项公式是怎么来的．现在再回过头来看斐波那契数列的各种有趣性质，更能给我们以启迪．

先看看斐波那契数列的递推性质．除了定义的方程(1.1)外，$\{F_n\}$ 还满足许多递推关系．我们来看下面的例子．

【例 1】 求证：

$$F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}. \qquad (7.1)$$

(n, k 为正整数且 $n>1$)

证明 (7.1) 既可以用 $\{F_n\}$ 的通项公式直接计算得出，也可以用数学归纳法证明．我们采取后一个方法，对 k 进行归纳．为使(7.1)对 $n=1$ 也成立，令 $F_0=0$．

(1) 当 $k=0$ 时，(7.1)两边都等于 F_n；当 $k=1$ 时，(7.1)就是(1.1)．因此都成立．

(2) 假设(7.1)对 $k=l$ 和 $k=l-1$ 都成立，则有

$$\begin{aligned}F_{n+l+1}&=F_{n+l}+F_{n+l-1}\\&=(F_{n-1}F_l+F_nF_{l+1})+(F_{n-1}F_{l-1}+F_nF_l)\\&=F_{n-1}(F_l+F_{l-1})+F_n(F_{l+1}+F_l)\\&=F_{n-1}F_{l+1}+F_nF_{l+2},\end{aligned}$$

所以(7.1)对 $k=l+1$ 也成立．这样，(7.1)便得到证明．

像(7.1)这样的恒等式还很多．例如：

$$F_{n+2}=1+\sum_{k=1}^{n}F_k; \tag{7.2}$$

$$F_{2n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}F_{2k}; \tag{7.3}$$

$$F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4}=F_{n+2}^4-1. \tag{7.4}$$

作为练习，这些恒等式的证明被收入习题中。

【例 2】 证明对于任何正整数 n,

$$C_n^1+5C_n^3+5^2C_n^5+\cdots=2^{n-1}F_n. \tag{7.5}$$

证明 由 $\{F_n\}$ 的通项公式(1.3)，有

$$2^{n-1}F_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\right]. \tag{7.6}$$

对$(1+\sqrt{5})^n$和$(1-\sqrt{5})^n$应用二项式定理展开，得

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\\&=(C_n^0+C_n^1\sqrt{5}+C_n^25+C_n^35\sqrt{5}+\cdots)\\&\quad-(C_n^0-C_n^1\sqrt{5}+C_n^25-C_n^35\sqrt{5}+\cdots)\\&=2\sqrt{5}(C_n^1+C_n^35+C_n^55^2+\cdots),\end{aligned}$$

代入(7.6)，即得(7.5)。

【例 3】 求由

$$a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n} \tag{7.7}$$

确定的数列 $\{a_n\}$ 的通项.

解 在下一节我们会得出解(7.7)这类方程的一般方法. 不过因为(7.7)比较特殊，我们试用观察法来猜测它的解. 先写出 $\{a_n\}$ 的前几项，为

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=\frac{3}{2},\ a_4=\frac{5}{3},\ a_5=\frac{8}{5},\ a_6=\frac{13}{8},\ \cdots$$

容易看出它们都是斐波那契数列相邻两项的比. 因此我们猜测，$a_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

令 $T_n=\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$. 根据命题 6.2, 有

$$T_{n+1}=a_{n+1}T_n=\left(1+\frac{1}{a_n}\right)T_n=T_n+\frac{1}{a_n}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k$$

$$=T_n+\prod_{k=1}^{n-1}a_k=T_n+T_{n-1}.$$

而在 $T_1=a_1=1$, $T_2=a_1a_2=2$ 时, $T_{n+1}=T_n+T_{n-1}$ 的解正好满足 $T_n=F_{n+1}$, 所以 $a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{F_{n+1}}{F_n}$. 于是有

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}}.$$

我们看到, 在没有经过约分的情况下, $\{a_n\}$ 的前几项都是既约分数. 由此容易想到, 是不是 F_n 总是与 F_{n+1} 互质呢? 答案是肯定的. 读者不难用数学归纳法予以证明.

下面我们再来看斐波那契数列的极限性质.

首先注意 $\{F_n\}$ 的通项公式(1.3). 其中出现两个无理数的 n 次方幂. 若要由公式(1.3)计算 F_n, 是否需要对无理数计算提出较高的精度要求呢? 其实不必.

为了下面及以后叙述上的方便, 我们引进下面的记号.

若 x 是一个实数, 将不超过 x 的最大整数记作$[x]$, 并称为 x 的整数部分. 例如$[5]=5$, $[7.8]=7$, $[-3.1]=-4$ 等等. 不难得出以下性质:

(1) $[x]=x\Leftrightarrow x$ 是整数;

(2) $x-1<[x]\leqslant x$;

(3) 若 n 是整数, 则$[x+n]=n+[x]$.

接着，我们再看(1.3)．把它改写一下，成为

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=F_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

由上面的性质(iii)，我们有

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\left[F_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$=F_n+\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

注意到 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 是一个绝对值小于1的数，且当 n 为奇数时是负的，n 为偶数时是正的，因此

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ -1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

所以，

$$F_n=\begin{cases}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]+1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases} \tag{7.8}$$

由此可见，在任何情况下，只要算出 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 的整数部分，就可以写出 F_n 了．同时，由于 $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$，我们还可以得出：

(a) 随着 n 在增大过程中交替地取奇、偶数值，F_n 在 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 两侧摆动；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(F_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)=0.$

【例 4】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 存在，并求出这个极限.

证明 按通项公式(1.3)，并注意到 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=1$，有

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^n\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}}{1+(-1)^n\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n+2}}.\qquad(7.9)$$

由于 $\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<1$，(7.9)右端当 $n\to\infty$ 时收敛，而且有：

命题 7.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.\qquad(7.10)$$

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618033988750\cdots$ 是一个非常重要的数，它就是人们常说的“黄金分割”数．我们将它记作 $\tilde{\omega}$. 所谓“黄金分割”，指的是在任一长度的线段 AB 上找到一个点 C，使得

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC},$$

图 7.1

这个 C 点就是 AB 上的黄金分割点(见图7.1)．只要解一个简单的分式方程便可算出

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

数 $\tilde{\omega}$ 有许多有趣的性质及应用．首先，$\{F_n\}$ 的差分方程

(1.1)两个特征根，一个是 $-\tilde{\omega}$，另一个是 $\frac{1}{\tilde{\omega}}=1+\tilde{\omega}$；其次，我们还可以证明 $\tilde{\omega}=2\cos\frac{2\pi}{5}$. 先设 $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则 $z^5=1$ 且 $z\neq 1$，于是

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0,$$

即

$$\begin{aligned}0&=z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}\\&=z^2+z+1+\bar{z}+\bar{z}^2\\&=2\left(\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\frac{2\pi}{5}+1\\&=4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1.\end{aligned}$$

可见 $2\cos\frac{2\pi}{5}$ 是多项式 x^2+x-1 的一个根，且是正根，因此是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

我们经常会遇到与 $\tilde{\omega}$ 有关的数学问题. 例如，若等腰 $\triangle ABC$ 的顶角 A 为 $36°$，BD 是 $\angle B$ 的平分线(如图 7.2)，则 D 就是 AC 的黄金分割点，且 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，相似比为 $\tilde{\omega}$. 还有，若三角形的三边长成等比数列，则其公比的大小在 $\tilde{\omega}$ 与 $\frac{1}{\tilde{\omega}}$ 之间(习题 8).

A
D
B C

图 7.2

在优选法中也要用到 $\tilde{\omega}$. 利用黄金分割来寻找单峰函数极值点，可以使计算(或测量)次数尽可能的少. 这种方法就称作"斐波那契法".

自然界和美学中也常遇到 $\tilde{\omega}$. 美学上发现，若长方形的

两边长之比接近 $\tilde{\omega}$ 时，会使人看得很舒服．许多古代建筑都应用了这一点．有人在研究音乐时，发现音乐里 $\tilde{\omega}$ 会不时出现．读者如果留心，很可能会在什么地方发现 $\tilde{\omega}$ 的踪迹．可以毫不夸张地说，这是数学在美学中起着重要作用的典型一例．

斐波那契数列在自然界中也有奇妙的表现．轮生叶植物（如烟草、洋葱等)的叶子及一些花的花瓣的分布，当我们从下向上数叶片时，就会发现沿顺时针(或逆时针)方向转了 k 圈之后，第 l 片叶子和开始那片叶子处于同一方向上，而 k、l 总是斐波那契数列中相邻的两项，如 $k=5$，$l=8$ 等等（如图 7.3）．有人计算过，这种排列最有利于利用阳光，也可能还有别的原因．

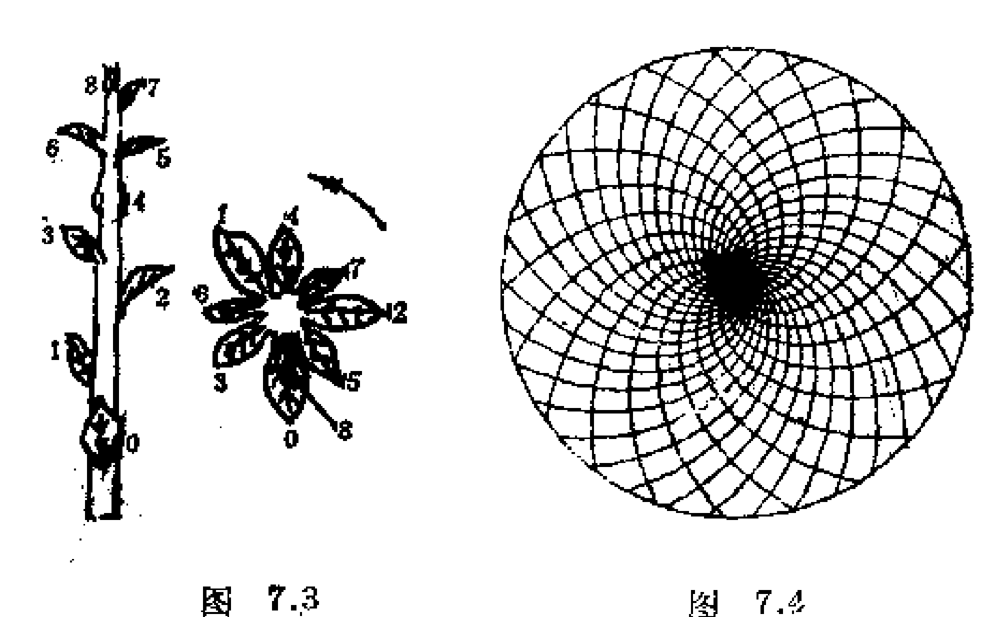


图 7.3　　　　图 7.4

向日葵种子的排列也是一个有趣的例子．从图 7.4 中可以明显地看到，葵花盘上有两组方向相反的螺线，它们都是“对数螺线”，即极坐标方程形如 $\rho=a^{\theta}(a>0)$ 的曲线．两组螺线围成的曲边四边形就是葵花子的位置，两组螺线的条数总

是斐波那契数列的连续两项．在小花盘上，它常常是(13，21)或(21，34)．在特别大的花盘上，甚至可以看到(89，144)这样的条数对．顺便说一下，这样的对数螺线在蜗牛壳和大理石切片上也能找到．

最后，我们来看看斐波那契数列的整除性质．如果我们写出它的前15项，就能毫不费力地找到2，3，4，…，13的倍数．若多写出几项并仔细观察，还可以发现所有F_{3k}都是偶数，且仅有这些项是偶数；而F_{4k}是所有被3整除的项的表达式；F_{15k}则是个位上为0的项的表达式等等．

显然，这个事实不是偶然的．

命题 7.2 对任何自然数m，

(1) 在数列$\{F_n\}$中一定存在m的倍数；

(2) 存在一个正整数l，使得$m|F_n$当且仅当$l|n$；

(3) 在$\{F_n\}$中，各项除以m的余数，组成一个周期数列．

证明 为方便起见，像例1那样设$F_0=0$．对任意$n>0$，设F_n除以m所得的余数为r_n，则$0\leqslant r_n\leqslant m-1$．

考虑$\{F_n\}$的任意两个连续项组成的数对(F_n, F_{n+1})．由于数对(r_n, r_{n+1})至多有m^2种不同的取值，根据抽屉原则*，一定存在$n\neq n'$，使得(r_n, r_{n+1})与$(r_{n'}, r_{n'+1})$的取值相同．即$r_n=r_{n'}$，$r_{n+1}=r_{n'+1}$．不妨设$n<n'$，于是存在正整数$l=n'-n$，使

$$F_n\equiv F_{n+l}(\mathrm{mod}\ m),\ F_{n+1}\equiv F_{n+1+l}(\mathrm{mod}\, m)^{**}. \quad (7.11)$$

另一方面，$\{F_n\}$满足的关系式(1.1)可以改写为

---

* 不了解抽屉原则的读者可以参看[5]．

** 设a, b为整数，记法$a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$的含义是$m|a-b$，称作“$a$和$b$模$m$同余”．关于同余式的基本性质可以参看初等数论的教材或小丛书．

$$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n.$$

(7.11)得到

$$F_{n+l-1}=F_{n+l+1}-F_{n+l}\equiv F_{n+1}-F_n(\bmod m),$$

因而有 $$F_{n+l-1}\equiv F_{n-1}(\bmod m).$$

反复使用这个倒推方法，或者说用"逆向归纳"的方法（参看[1]），我们便得到

$$F_l\equiv F_0(\bmod m). \tag{7.12}$$

由于 $F_0=0$，就说明 $m|F_l$. 这就证明了(1).

在上述过程中同时还可得到

$$F_{l+1}\equiv F_1(\bmod m). \tag{7.13}$$

由(7.12)，(7.13)及(1.1)，根据归纳法即可得出

$$F_{n+l}\equiv F_n(\bmod m) \tag{7.14}$$

对一切 $n\geqslant 0$ 成立. 它可以改写成

$$r_{n+l}=r_n(n\geqslant 0), \tag{7.15}$$

这就说明 $\{r_n\}$ 是周期数列（参见第五节），于是(3)得证.

为了证明(2)，我们像在第五节中那样将 $\{F_n\}$ 扩展成两端无穷数列. 上面的讨论实际上证明了(3)对扩展后的斐波那契数列也成立. 我们还要用到下面这个引理.

引理7.1 设数列 $\{a_n\}$ 满足差分方程 $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$，其中 r 为整数，$s=\pm 1$. 如果 $\{a_n\}$ 中有两个连续项是整数且能被 m 整除，则所有项都是整数且能被 m 整除.

这个结论对于两端无穷数列也成立.

理由很简单：若 a_k，a_{k+1} 是整数且能被 m 整除，则对 $n>k+1$，用归纳法就可以证明 a_n 是整数且能被 m 整除；而对 $n<k$，由于 $s=\pm 1$，有 $a_n=ra_{n+1}+a_{n+2}$ 或 $a_n=ra_{n+1}-a_{n+2}$，用逆向归纳法同样可以证明 a_n 是整数且能被 m 整除.

特别地，对任意整数 n，$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 是整数，因为 $\{a_n\}$ 满足差分方程(1.1)及初始条件 $a_1=2$，$a_2=1$.

现在我们来证明(2)．设整数 j，k 使得 $m|F_j$，$m|F_k$．令 $G_n=F_{k+n(j-k)}$，则 $G_0=F_k$，$G_1=F_j$．由 $\{F_n\}$ 的通项公式(1.3)，有

$$G_n=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n, \tag{7.16}$$

其中

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k,\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

$$\alpha_1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{j-k},\ \alpha_2=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{j-k}. \tag{7.17}$$

由此及第三节的知识可知，$\{G_n\}$ 满足一个差分方程

$$G_n+rG_{n-1}+sG_{n-2}=0, \tag{7.18}$$

其中 $s=\alpha_1\alpha_2=\pm1$，$r=-(\alpha_1+\alpha_2)$．由上所述 r 是整数．由于 G_0，G_1 都能被 m 整除，根据引理 7.1 及方程(7.18)，即得到 $m|G_n$ 对一切整数 n 成立.

现在，设在 $\{F_n\}(n>0)$ 的所有能被 m 整除的项中，F_l 是下标最小的一项，则 $m|F_{nl}$ 对任何整数 n 成立．这只需将以上的 k 和 j 取 0 和 l，于是 $G_0=F_0=0$，$G_1=F_l$，因而有 $m|G_n=F_{nl}$．下面再来证明，若 $m|F_k$，则 $l|k$.

令 $t=\left[\frac{k}{l}\right]$，则 $0\leqslant\frac{k}{l}-t<1$，即 $0\leqslant k-lt<l$．再令 $k-lt=d$，我们只要证明 $d=0$ 就行了．用反证法．设 $d>0$，我们取 $j=lt$．由于 $m|F_l$，所以 $m|F_j$．此时 m 整除 $G_n=F_{k-nd}$．再取 $n=\left[\frac{k}{d}\right]$，则又有 $0\leqslant k-nd<d<l$．但 $m|F_{k-nd}$，由 l 的

最小性，只能有 $k-nd=0$，说明 $d|k$. 再次取 $n=\frac{k}{d}-1$，则得到 $m|F_d$，这与 l 的最小性矛盾，从而证明了 $d=0$. 于是也就证明了(2).

注意，这里的 l 不一定等于周期数列 $\{r_n\}$ 的周期. 这只要检验一下 $m=3$ 的情况就会得到证实.

命题 7.2 解释了前面我们所看到的整除现象. 我们依靠它，还可以进一步由 n 的因数来研究 F_n 的因数. 如 F_{20} 肯定能被 $F_4=3$ 和 $F_{10}=55$ 整除；更进一步，F_l 肯定能被 F_{kl}(k, l 为正整数)整除(什么原因?)，而 F_{19} 除了 1 和 F_{19} 本身之外，任何约数都不是 $\{F_n\}$ 中的一项(又为什么?).

【例 5】 在斐波那契数列 $\{F_n\}$ 中，哪些项能被 60 整除?

解 设 l 是使 $60|F_l$ 的最小整数，则 $3|F_l$, $4|F_l$, $5|F_l$. $\{F_n\}$ 中第一个能被 3, 4 和 5 整除的项分别是 $F_4=3$, $F_6=8$ 和 $F_5=5$. 由命题 7.2, l 应能同时被 4, 6, 5 整除，所以是这三个数的最小公倍数，即 $l=60$. 此时，由于 8, 3, 5 都整除 F_{60}，便有 $60|F_{60}$. 因此，$\{F_n\}$ 中能被 60 整除的项恰好是形如 F_{60k}(k 为正整数)的所有项.

后面我们还将看到 $\{F_n\}$ 的其他一些性质.

与斐波那契数列有关的研究现在仍在进行. 美国从 1963 年起创办了"斐波那契季刊"(Fibonacci Quarterly)，甚至还有斐波那契数学协会. 这些也是为了纪念斐波那契所作的贡献.

习 题 六

1. 用 $\{F_n\}$ 的通项公式直接验证(7.1).
2. 证明恒等式(7.2)～(7.4).

3. 证明斐波那契数列 $\{F_n\}$ 满足下列关系:

(1) $F_{2n-1}=F_n^2+F_{n-1}^2$;

(2) $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2=F_nF_{n+1}$;

(4) $\sum\limits_{k=1}^{2n} F_kF_{k+1}=F_{2n+1}^2-1$;

(5) $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_{2k}=F_{2n}^2$;

(6) $F_n^2=F_{n+1}F_{n-1}+(-1)^{n+1}$;

(7) $F_{n-2}F_{n+2}-F_{n-1}F_{n+1}=2(-1)^{n+1}$.

4. (1) 证明 $F_n=\sum\limits_{\substack{k\geq j\\ k+j=n-1}} C_k^j$; (2) 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{F_kF_{k+2}}$.

5. 解差分方程 $a_{n+1}=\frac{1}{a_n+1}$, $a_1=0$.

6. 证明:斐波那契数列的任意两相邻项都互质.

7. 设 $\{x_n\}$ 满足差分方程 $x_n=x_{n-1}+\frac{x_{n-2}^2+x_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}}$ 及初始条件 $x_1=x_2=1$, $x_3=2$, 证明 $x_n=F_n(n>0)$.

8. 设一个三角形的三边长成等比数列, 公比为 q. 证明:

$$\bar{\omega}<q<\frac{1}{\bar{\omega}}.$$

9. 证明 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}<\frac{1}{\bar{\omega}}$.

10. 在五角星中有些线段之间的比是 $\bar{\omega}$, 试着找找看.

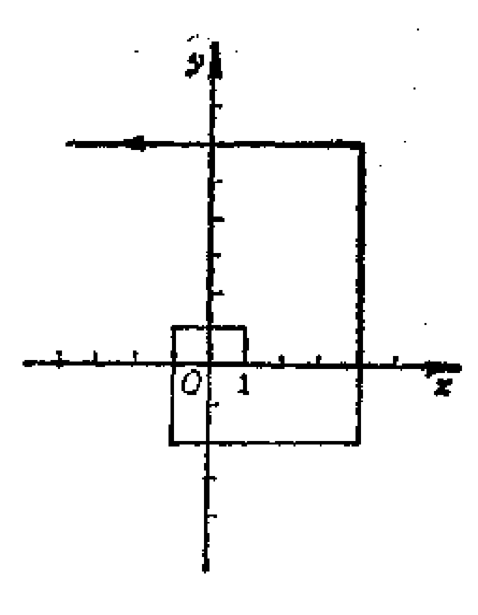
11. 一动点从原点出发, 沿 x 轴正向运行 1 个长度单位后, 左转 $90°$ 向上运行 1 个长度单位, 再左转沿 x 轴反方向运行 2 个长度单位, 等等(如图). 每次先左转 $90°$, 再运行至前两次运行距离之和的地方. 证明:这个动点每次转弯的位置, 横坐标的绝对值都是平方数.

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $S_n=2a_n+a_{n-1}$, $a_0=a_1=1$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

13. 证明下列关于 $\{F_n\}$ 的命题:

(1) 若 $26\mid F_n$, 则 $21\mid n$;

(2) F_{140} 能被 2145 整除;



（第11题图）

(3) F_{19}除了1和本身之外，任何其他约数都不是$\{F_n\}$的一项。

14．用11除$\{F_n\}$的各项，哪些余数一定不会出现？

15．设$A=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为一个无穷小数，其中每个$a_n$都是一个十进制数字．若$a_n$等于$a_{n-1}+a_{n-2}$的个位数$(n>2)$，

(1) 证明A是有理数；

(2) 当$a_1=a_2=1$时，A的循环节长度是多少？

(3) 当$a_1=2$，$a_2=6$时，将A写成分数形式．

***16**．（第22届国际中学生数学竞赛题） 设m，n为1到1981之间的整数，并满足$(n^2-mn-m^2)^2=1$．求m^2+n^2的最大值．

（提示：先利用习题3的(6)及逆向归纳法，证明$(n^2-mn-m^2)^2=1$当且仅当m，n是斐波那契数列相邻的两项．）

17．某人上楼时，可以每步迈上一阶，也可以迈上两阶．他从地面到达第20级台阶，共有多少种不同的上法？

18．各位数字都是1或2且各位数字之和等于50的自然数有多少个？

八、另一些差分方程

在第一节中，我们所看到的一些差分方程问题，有几个在前几节已陆续给出了答案．它们都属于常系数线性差分方程的应用范围．剩下的几例，便不再是这个范围的问题了．要解答这些问题，我们就得把目光转向非常系数的线性方程和非线性方程．为了不使问题太复杂，本节以一阶方程的解法及应用为主．

(1) 差分方程

$$x_n=f(n)x_{n-1}+g(n) \tag{8.1}$$

的解法．

在一阶差分方程(8.1)中，$f(n)$、$g(n)$是n的两个已知函数．当$f(n)$是非零常数时，(8.1)就成了常系数线性差分方程．而在一般情况下，(8.1)是一阶线性差分方程的一般形式．下面，我们从例题开始，逐步总结出方程(8.1)的解法．

【例 1】 解差分方程 $x_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2x_{n-1}+\frac{n}{n+1}$, $x_1=1$.

解 将方程两边同除以n^2，得到

$$\frac{x_n}{n^2}=\frac{x_{n-1}}{(n-1)^2}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

再换元，令$y_n=\frac{x_n}{n^2}$，方程便成了

$$y_n=y_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)},\ y_1=x_1=1.$$

由命题 6.1，可知

$$y_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+y_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}.$$

这样，由于 $\frac{x_n}{n^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$，有 $x_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{n^2}{n+1}$.

看了例 1，读者也许会想：这个例子恰巧比较容易看出该怎么换元．当 $f(n)$ 的形式复杂到使我们无法观察出怎样换元时，又该怎么办？

我们对方程(8.1)作如下考察：

(a) 将 $g(n)$换为 0，(8.1) 就成为命题 6.2 中的方程的形式；

(b) 将 $f(n)$ 换为 1，(8.1) 就成为命题 6.1 中的方程的形式．

这就启发我们这样考虑：能否经过换元，将解方程(8.1)的过程转化为解两个方程，而这两个方程都具有我们所熟悉的形式？

我们先试解方程

$$x_n=f(n)x_{n-1}. \tag{8.2}$$

这可以应用命题 6.2．一旦求出(8.2)的一个解 $\tilde{x}_n$，我们就作代换 $x_n=\tilde{x}_ny_n$，于是方程(8.1)便成了 $\tilde{x}_ny_n=f(n)\tilde{x}_{n-1}y_{n-1}+g(n)$．但 $f(n)\tilde{x}_{n-1}=\tilde{x}_n$，所以有

$$y_n=y_{n-1}+\frac{g(n)}{\tilde{x}_n}. \tag{8.3}$$

我们可以用命题 6.1 提供的求和法解方程 (8.3)．求得 y_n，也就得到 x_n 了．

在以上过程中，方程(8.2)的初始条件几乎可以任意设定(只要不取 0 就行了)．但对方程(8.3)，初始条件就必须为

$$y_1=\frac{x_1}{\tilde{x}_1}.$$

【例 2】 解差分方程 $x_n=\frac{n+m}{n}x_{n-1}+P_{n+m}^m$ *, $x_0=1$.

解　先解方程 $a_n=\frac{n+m}{n}a_{n-1}$, $a_0=x_0=1$.

根据第六节例 6, $a_n=C_{n+m}^m$, 于是, 我们令 $x_n=C_{n+m}^m y_n$, 原方程便成为

$$C_{n+m}^m y_n=\frac{n+m}{n}C_{n+m-1}^m y_{n-1}+P_{n+m}^m,$$

而 $\frac{n+m}{n}C_{n+m-1}^m=C_{n+m}^m$, 所以

$$y_n=y_{n-1}+\frac{P_{n+m}^m}{C_{n+m}^m}=y_{n-1}+m!\ .$$

另外, $y_0=\frac{x_0}{C_m^m}=1$. 这样便可解得 $y_n=n\cdot m!+1$. 因此, $x_n=n\cdot m!\,C_{n+m}^m+C_{n+m}^m=nP_{n+m}^m+C_{n+m}^m$.

现在, 我们可以来找一找第一节的例 2——那个分糖问题的答案了.

先设分给了第 n 个小朋友后, 还剩下 x_n 块糖. 那么第 $n+1$ 个小朋友分得的糖为 $\frac{1}{n+2}(x_n+4)$块, 剩下

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}(x_n+4) \tag{8.4}$$

块糖. 将(8.4)看作一个差分方程, 它应当满足 $x_{20}=40$.

解方程(8.4). 换元, 令$(n+1)x_n=y_n$, 方程便成为

$$y_{n+1}=y_n+4(n+1),$$

于是 $y_n=\sum_{k=1}^{n}4k+y_0=2n(n+1)+y_0$, 故 $x_n=2n+\frac{y_0}{n+1}$. 但 $x_{20}=40$, 所以 $40=2\times 20+\frac{y_0}{20+1}$, 因此 $y_0=0$.

---

* P_n^m 指的是从 n 个不同元素中, 任取出 m 个元素进行排列的排列数.

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

最后，我们得到 $x_n=2n$.

从这里我们可以知道，第 $n+1$ 个小朋友分得了两块糖。因为 $\frac{1}{n+2}(x_n+4)=\frac{1}{n+2}(2n+4)=2$（与 n 无关），所有的小朋友恰好分得同样多的糖.

(2) 差分方程 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的解法.

差分方程

$$a_{n+1}=f(a_n) \tag{8.5}$$

的特征是，a_{n+1} 仅是 a_n 的函数，函数表达式中不显含 n. 除了 $a_{n+1}=pa_n+q$（p, q 为常数，$p\neq0$）外，方程(8.5)已不再属于线性差分方程的范围了.

从理论上来说，方程(8.5)是具有一般解法的. 我们可以由 $a_1=f(a_0)$, $a_2=f(a_1)=f(f(a_0))$, $\cdots$, $a_n=f(f(\cdots f(a_0)\cdots))$ 看出，$a_n=f^n(a_0)$. 这里，$f^n(x)$ 指的是函数 $f(x)$ 对自身复合 $n-1$ 次*. 但表达式

$$a_n=f^n(a_0) \tag{8.6}$$

作为方程(8.5)的解，常常不能令人满意. 所以，我们更应当注意形如(8.5)的方程的特殊解法. 让我们来看下面的例子.

【例 8】 **解差分方程** $a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5}$, $a_0=1$.

解 **我们用换元法来解这个方程. 为此，设 x 是一个待定的常数，则有**

$$a_{n+1}-x=\frac{7a_n+3}{a_n+5}-x=\frac{(7-x)a_n+(3-5x)}{a_n+5},$$

---

* 若 f, g 是两个函数，且 g 的值域包含在 f 的定义域中，则可以定义 g 与 f 的"复合函数" $f\circ g(x)$ 为：$f\circ g(x)=f[g(x)]$. 特别地，若 f 的值域包含在它的定义域中，则可以定义 $f^2=f\circ f$, $f^3=(f\circ f)\circ f$, 等等.

令 $\frac{7-x}{1}=\frac{3-5x}{-x}$，则可以解得 $x=-1$ 或 $x=3$. 任取其中的一个，如取 $x=-1$，有

$$a_{n+1}+1=\frac{8(a_n+1)}{a_n+5}.$$

再令 $a_n+1=\frac{1}{b_n}$，则得到

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{8\cdot\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_n}+4}=\frac{8}{1+4b_n},$$

也就是 $$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{8},\quad b_0=\frac{1}{a_0+1}=\frac{1}{2}.$$

像第四节的例 5 那样，可求出 $b_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. 所以，有

$$a_n=\frac{1}{b_n}-1=\frac{3\cdot 2^n-1}{2^n+1}.$$

例 3 中的差分方程称为分式线性差分方程. 它的一般形式为

$$x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d},\tag{8.7}$$

其中 a, b, c, d 是四个常数，$c\neq 0$，$ad\neq bc$. 像例 3 一样，设 λ 是一个常数，则

$$x_{n+1}-\lambda=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}-\lambda=\frac{(a-c\lambda)x_n+(b-d\lambda)}{cx_n+d}.$$

令 $\frac{a-c\lambda}{1}=\frac{b-d\lambda}{-\lambda}$，即

$$c\lambda^2+(d-a)\lambda-b=0.\tag{8.8}$$

任取(8.8)的一个根 λ_1，应有

$$x_{n+1}-\lambda_1=\frac{(a-c\lambda_1)(x_n-\lambda_1)}{cx_n+d}.$$

再像例3那样换元，便能求出结果了．我们还可以按下面的方法做．设λ_1，λ_2为(8.8)的两根，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则有

$$\frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2}=\frac{(a-c\lambda_1)(x_n-\lambda_1)}{(a-c\lambda_2)(x_n-\lambda_2)}$$

$$=\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}\cdot\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}.$$

令$\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}=y_n$，就得到

$$y_{n+1}=\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}y_n.$$

由于$\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}$是常数，所以$y_n=\left(\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}\right)^n\cdot y_0$，也就有

$$\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}=\left(\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}\right)^n\cdot\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}.$$

再使用分比定理，就能解得x_n了．

【例4】 已知a是一个非零常数．求差分方程

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+a}{2x_n}\qquad(8.9)$$

的通解．

解 设α是a的一个平方根．显然，$x_n=\alpha$是(8.9)的一个解．以下设$x_0\neq\alpha$．我们可以将(8.9)变形为

$$\frac{x_{n+1}}{\alpha}=\frac{x_n^2+a}{2\alpha x_n}.$$

由合分比定理，得

$$\frac{x_{n+1}+\alpha}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{x_n^2+2\alpha x_n+a}{x_n^2-2\alpha x_n+a}=\frac{(x_n+\alpha)^2}{(x_n-\alpha)^2}=\left(\frac{x_n+\alpha}{x_n-\alpha}\right)^2.$$

令$y_n=\frac{x_n+\alpha}{x_n-\alpha}$，则有$y_{n+1}=y_n^2$．于是，

$$y_n=y_{n-1}^2=(y_{n-2}^2)^2=[(y_{n-3}^2)^2]^2=\cdots=y_0^{2^n}.$$

即

$$y_n=\left(\frac{x_0+\alpha}{x_0-\alpha}\right)^{2^n}.$$

另一方面，对 $y_n=\dfrac{x_n+\alpha}{x_n-\alpha}$ 使用合分比定理，有

$$\frac{y_n+1}{y_n-1}=\frac{x_n}{\alpha},$$

所以，

$$x_n=\alpha\cdot\frac{\left(\dfrac{x_0+\alpha}{x_0-\alpha}\right)^{2^n}+1}{\left(\dfrac{x_0+\alpha}{x_0-\alpha}\right)^{2^n}-1}=\alpha\cdot\frac{(x_0+\alpha)^{2^n}+(x_0-\alpha)^{2^n}}{(x_0+\alpha)^{2^n}-(x_0-\alpha)^{2^n}}.$$

(8.10)

注意，$x_n=\alpha$ 也是(8.10)的一个特殊情形。所以(8.10)是方程(8.9)的通解公式。

【例 5】 解差分方程 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$a_1=\sqrt{2}$。

解 用数学归纳法不难证明，$1<a_n<2$ 对 $n=1, 2, \cdots$ 均成立。于是可以设 $a_n=2\cos\theta_n\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$，原方程便转化为

$$2\cos\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\theta_n}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta_n}{2}}=2\cos\frac{\theta_n}{2}.$$

由于余弦函数在区间$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上是一一对应的函数，所以应有 $\theta_{n+1}=\dfrac{\theta_n}{2}$。而 $a_1=2\cos\theta_1=\sqrt{2}$，则 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\theta_n=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$，也就有 $a_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$。

这个例题告诉我们，$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$；进一步，还有

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=2.$$

【例 6】 解差分方程 $a_n=a_{n-1}^2-2$, $a_0=4$.

解 令 $a_n=x_n+\frac{1}{x_n}$，则方程化为

$$x_n+\frac{1}{x_n}=x_{n-1}^2+\frac{1}{x_{n-1}^2}. \tag{8.11}$$

为了从中求得 x_n 与 x_{n-1} 的关系，我们先来研究分式方程 $x+\frac{1}{x}=a$ 的根. 这个方程的两根为

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2},$$

两根互为倒数. 因此，(8.11)又可表示为

$$x_n=\frac{x_{n-1}^2+\frac{1}{x_{n-1}^2}\pm\left(x_{n-1}^2-\frac{1}{x_{n-1}^2}\right)}{2},$$

即 $x_n=x_{n-1}^2$ 或 $x_n=\frac{1}{x_{n-1}^2}$.

从这两个关系式中，无论取出哪一个，都可以求得(8.11)的解. 如我们取 $x_n=x_{n-1}^2$，像例 4 那样，可得到 $x_n=x_0^{2^n}$. 再由

$$x_0+\frac{1}{x_0}=a_0=4$$

解得 $x_0=2\pm\sqrt{3}$，由于 $2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 互为倒数，所以无论 x_0 取其中哪一个，都有 $a_n=(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}$.

读者可以验证一下，若前面我们改为取 $x_n=\frac{1}{x_{n-1}^2}$，答案仍然不变.

从前面的例题中我们可以看到，换元的方法在解差分方程中有着广泛的应用. 它可以把许多形式上较复杂、我们不够熟悉的方程，转化为我们熟悉的形式. 如：

1. 常系数线性齐次差分方程；

2. 能转化为齐次方程的常系数线性非齐次方程;

3. 可以用第六节的两个命题来解的方程;

4. 形如 $y_n=y_{n-1}^2$ 的方程.

其中第4个，尽管前几节未出现过，如果令 $x_n=\log_a y_n$，便得到 $x_n=2x_{n-1}$，仍是我们所熟知的. 采用这种取对数的换元法，还可以解一些更复杂的差分方程(习题6(1)). 除了这里讲到的例子，还有许多差分方程(包括一些阶数较高的方程)，常常可以用换元的方法来解.

最后，我们应用前面的方法和结论，来解一个第18届国际中学生数学竞赛题.

【例7】 设

$$P_1(x)=x^2-2,\ P_i(x)=P_1(P_{i-1}(x)),\ (i=2,\ 3,\ \cdots) \tag{8.12}$$

求证：对任何自然数 n，方程 $P_n(x)=x$ 的根都是不同的实数.

证法一 由 $P_1(x)=x^2-2$ 及 $P_i(x)=P_1(P_{i-1}(x))$，可以得出

$$P_i(x)=P_{i-1}^2(x)-2. \tag{8.13}$$

这是一个关于 i 的差分方程.

为了能用换元法求出方程 $P_n(x)=x$ 的根，需要先证明这个方程的根 x 一定满足 $|x|\leqslant 2$. 这可以用反证法. 若 $|x|>2$，则 $P_1(x)-|x|=x^2-2-|x|=(|x|-2)(|x|+1)>0$，也就是 $P_1(x)>|x|$.

假设 $P_{k-1}(x)>|x|\ (k>1)$，则

$$P_k(x)=P_{k-1}^2(x)-2>|x|^2-2=P_1(x)>|x|,$$

根据数学归纳法，$P_n(x)>|x|\geqslant x$ 对任何自然数 n 成立，x 当然也就不会是方程 $P_n(x)=x$ 的根了.

现在，由于方程 $P_n(x)=x$ 的实根都在区间$[-2, 2]$上，可以设它为 $x=2\cos t$，则 $P_1(x)=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$. 再由(8.13)，不难归纳出 $P_n(x)=2\cos 2^n t$. 要解方程 $P_n(x)=x$，只需求出满足 $2\cos 2^n t=2\cos t$ 的 t 的值. 这是一个关于 t 的三角方程. 它的解满足 $2^n t=2k\pi\pm t$，即

$$t=\frac{2k\pi}{2^n\pm1}. \quad (k \text{ 是整数})$$

要写出方程 $P_n(x)=x$ 的所有不相同的实根，只需取

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{2^n+1}, \ k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$$

和
$$x=2\cos\frac{2k\pi}{2^n-1}, \ k=0, 1, \cdots, 2^{n-1}-1.$$

因为这样取定 k 的值，可以使 $\frac{2k\pi}{2^n+1}$、$\frac{2k\pi}{2^n-1}$ 都在区间 $[0, \pi]$上，且相互之间都不相等. 根据余弦函数在$[0, \pi]$上的单调性，我们得到了方程 $P_n(x)=x$ 的 $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ 个互不相同的实根.

另外，$P_n(x)$又是 x 的 2^n 次多项式.（想一想，为什么?）所以方程 $P_n(x)=x$ 仅有 2^n 个根. 它们只能是我们已经找到的 2^n 个实根. 因而命题得证.

如果在解决这个例题时，应用例 6 的结论，会使过程变得简洁明快. 过程如下：

证法二 令 $P_0(x)=x$，则(8.12)当 $i=1$ 时也成立.

由于差分方程 $P_i(x)=P_{i-1}^2(x)-2$ 与例 6 的方程是相同的，而初始条件为 $P_0(x)=x$，所以按例 6 的方法可以解得

$$P_n(x)=a^{2^n}+a^{-2^n},$$

其中 $a=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$. 再由例 6 的方法可知，当 $P_n(x)=x$

时，或者 $a^{2^n}=a$，或者 $a^{2^n}=a^{-1}$，于是 $|a|=1$. 我们可以将 a 表示为 $a=\cos\theta+i\sin\theta$，其中 θ 或者等于

$$\frac{2k\pi}{2^n+1}(1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}),$$

或者等于 $$\frac{2k\pi}{2^n-1}(0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1).$$

然后，由 $a=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$，$a^{-1}=\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$

得 $x=a+a^{-1}=2\cos\theta$. 这样便得到了方程 $P_n(x)=x$ 的 2^n 个互不相同的实根.

习 题 七

1. 解下列差分方程:

(1) $x_n=3^{2n-1}x_{n-1}+3^{(n+1)^2}$, $x_0=1$;

(2) $y_n=\dfrac{n-1}{n}y_{n-1}+2^{n-1}$, $y_1=2$;

(3) $a_{n+1}=(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}n\alpha)a_n+\sin(n+1)\alpha$, $a_1=0$;

$\left(\alpha \text{ 为常数}; \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}, k \text{ 是整数.}\right)$

(4) $a_n=(n+m+1)a_{n-1}+P_{n+m-1}^{n-1}$, $a_0=1$.

2. 解下列分式线性差分方程:

(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$, $a_1=0$;

(2) $b_{n+1}=\dfrac{3b_n-4}{b_n+7}$, $b_1=0$;

(3) $x_n=\dfrac{1+x_{n-1}}{2-x_{n-1}}$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

3. 若数列 $\{y_n\}$ 满足差分方程 $y_{n+1}=\dfrac{2y_n-1}{3y_n-2}$. 求证: 当初始条件为 $y_1=1$ 或 $y_1=\dfrac{1}{3}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_1$; 当 $y_1\neq1$ 或 $\dfrac{1}{3}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在.

4. 设实常数 a, b, c, d 满足 $bc\neq ad$ 且 $c\neq0$. 若满足差分方程

$$a_{n+1}=(a+d)a_n+(bc-ad)a_{n-1}$$

的任何数列 $\{a_n\}$ 都是周期的，求证：满足差分方程(8.7)的数列 $\{x_n\}$ 也是周期的。

5．若 $f_n(x)=\dfrac{f_{n-1}(x)+2x}{f_{n-1}(x)+x-1}$，$f_0(x)=1$，证明：对任意 x，$f_n(x)\neq 2$。

6．解下列差分方程：

(1) $a_n=3a_{n-1}^2$，$a_0=1$；

(2) $a_n=\dfrac{2a_{n-1}}{1-a_{n-1}^2}$，$a_1=\sqrt{3}$；

(3) $x_n=\sqrt{2x_{n-1}^2+1}$，$x_1=0$；

(4) $a_n=a_{n-1}^3-3a_{n-1}$，$a_0=6$；

(5) $y_n=2y_{n-1}^2-1$，$y_0=2$。

7．(1) 解差分方程 $a_n=\sqrt{\dfrac{a_{n-1}+1}{2}}$，$a_0=a(|a|\leqslant 1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

8．设 $f(2^n)=2f(2^{n-1})+2^n-1$，$f(1)=0$．求 $f(2^n)$。

9．已知数列 $\{x_n\}$ 满足差分方程(8.7)，且 $x_1=\lambda$，λ 是方程(8.8)的根．求证：$\{x_n\}$ 是常数列。

10．用适当的换元方法解下列差分方程：

(1) $x_n=2^n x_{n-1}+2^{2n-1}-2^n$，$x_1=0$；

(2) $y_n=ny_{n-1}+n-1$，$y_0=1$；

(3) $a_{n+2}=\dfrac{2^n a_{n+1}^2}{a_n}$，$a_1=1$，$a_2=1$；

(4) $b_{n+1}=2b_{n-1}-\dfrac{b_{n-1}b_{n-2}}{b_n}$，$b_1=2$，$b_2=1$，$b_3=2$；

(5) $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，$a_1=2$，$a_2=3$；

(6) $b_n=\left(2-\dfrac{2}{n}\right)b_{n-1}-\left(1-\dfrac{2}{n}\right)b_{n-2}$，$b_1=0$，$b_2=\dfrac{1}{2}$。

11．设 $\{a_n\}$ 满足差分方程 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$．证明存在常数 c，使得 $a_{n+1}^2+pa_{n+1}a_n+qa_n^2+cq^n=0\ (n>0)$。

12．数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1=5$，$x_{n+1}=x_n^2-2$．计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}.$$

13. 已知 a 是非零复数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$x_i=\frac{1}{2}\left(x_{i-1}+\frac{a}{x_{i-1}}\right),$$

$x_n=x_1$，求 x_1 所有可能的值。

14. （第46届美国大学生数学竞赛题） 设 d 为实数，对每个非负整数 m，定义一个序列 $\{a_m(j)\}$，$j=0, 1, 2, \cdots$，满足条件

$$a_m(0)=\frac{d}{2^m},\ a_m(j+1)=[a_m(j)]^2+2a_m(j)\quad (j\geqslant 0).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(n)$。

15. 定义多项式列：$P_0(x)=2$，$P_1(x)=1$，$P_n(x)=P_{n-1}(x)-x^2P_{n-2}(x)\quad (n\geqslant 2)$。试解方程 $P_n(x)=ax^n$，a 为给定的常数。

16. 定义多项式列：$P_0(x)=2$，$P_1(x)=x$，$P_n(x)=xP_{n-1}(x)-P_{n-2}(x)\quad (n\geqslant 2)$。证明，对任意复数 a 及自然数 n，当 $a\neq\pm 2$ 时，方程 $P_n(x)=a$ 有 n 个互不相同的根。又问：若 $a=2$ 或 $a=-2$ 呢？

九、差分方程组与偏差分方程

如果我们的读者对第一节最后的那个储蓄问题有兴趣，并试着推算过的话，一定会发现它与其他问题有一个不同之处，就是不能把问题仅用一个数列来表示．现在我们就从这个例子开始，引入差分方程组的概念．

我们可以先设那位先生去年最后的一个月中，存入了 a 元，也取出了 a 元，则今年前几个月的存、取情况为：

月份	1	2	3	4	5	…
存入(元)	$a+1$	$(a-1)+1=a$	$a+1$	a	$a+1$	…
取出(元)	$a-1$	$(a+1)-1=a$	$a-1$	a	$a-1$	…

很明显，奇数的月份存入的都比取出的多 2 元，而偶数月存、取的正好相同．

这本是一个不复杂的问题，只是其中所使用的递推关系却与前几节所讲的有所不同．这里，无论是计算存的，还是计算取的，都不能独立地进行，二者在推算过程中相互依赖．如果我们设第 n 个月存入了 a_n 元，取出了 b_n 元，则第 $n+1$ 个月就存入了 b_n+1 元，而取出了 a_n-1 元，即

$$\begin{cases} a_{n+1}=b_n+1, \\ b_{n+1}=a_n+1. \end{cases} \tag{9.1}$$

这是一个*差分方程组*，其中含有两个整变量函数(数列)a_n 和 b_n．

一般地，我们把

$$
\begin{cases}
x_n^{(1)}=F_1(x_{n-1}^{(1)},\ x_{n-1}^{(2)},\ \cdots,\ x_{n-1}^{(k)},\ n),\\
x_n^{(2)}=F_2(x_{n-1}^{(1)},\ x_{n-1}^{(2)},\ \cdots,\ x_{n-1}^{(k)},\ n),\\
\quad\cdots\cdots\\
x_n^{(k)}=F_k(x_{n-1}^{(1)},\ x_{n-1}^{(2)},\ \cdots,\ x_{n-1}^{(k)},\ n)
\end{cases}
\tag{9.2}
$$

叫做一个含有 k 个未知函数的常差分方程组. 其中 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 是 k 个 $k+1$ 元函数. 与差分方程类似地, 我们可以定义: 如果 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 形如

$$
F_i(u_1, u_2, \cdots, u_k, t)=a_{i1}(t)u_1+\cdots+a_{ik}(t)u_k+c_i(t), \quad (1\leqslant i\leqslant k) \tag{9.3}
$$

则称方程组(9.2)为线性的; 若 $c_i(t)=0(1\leqslant i\leqslant k)$, 则称(9.2)为线性齐次的; 若 $a_{ij}(t)(i, j=1, 2, \cdots, k)$都是常数, 称(9.2)为常系数线性的, 等等.

差分方程组也需要有适当的初始条件. (9.2)的初始条件一般是

$$
x_1^{(1)}=b_1,\ x_1^{(2)}=b_1,\ \cdots,\ x_1^{(k)}=b_k. \tag{9.4}
$$

不难看出, 满足初始条件(9.4)的整变量函数组$(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots, x_n^{(k)})$至多有一个. 另一方面, 只要函数 $F_i(1\leqslant i\leqslant k)$对所有变量的所有取值都有定义 (其中 t 只取整数值), 则从(9.4)开始, 通过(9.2)可以逐步确定所有$(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots, x_n^{(k)})$的值$(n=1, 2, \cdots)$. 也就是说, 满足方程组(9.2)及其初始条件(9.4)的函数组存在. 这就是常差分方程组解的存在唯一性. 这些结论, 与第二节关于常差分方程的那些结论都是类似的.

对于任何一个常系数线性齐次差分方程组, 我们都可以找到它的通解, 且解的表达式中只出现指数式、三角函数式和多项式. 要证明这一点, 需要用一些线性代数的知识, 所以我

们把它放在附录 III 中了. 这里，我们可以先通过以下例题，看看那些较简单的常系数线性差分方程组怎样用代换的方法来解.

【例 1】 解差分方程组

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, & ① \\ y_n = 3x_{n-1} - y_{n-1}, & ② \end{cases}$$

$x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

解 设 α 是一个待定的常数，用 α 去乘 ② 再加 ①，得

$$x_n + \alpha y_n = (1+3\alpha)x_{n-1} + (1-\alpha)y_{n-1}, \qquad (9.5)$$

并令 $\dfrac{1+3\alpha}{1} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$，可以解得 $\alpha = -1$ 或 $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

分别将 $\alpha = -1$ 和 $\alpha = \dfrac{1}{3}$ 代回(9.5)，得到

$$x_n - y_n = -2(x_{n-1} - y_{n-1})$$

和 $x_n + \dfrac{1}{3}y_n = 2\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{3}y_{n-1}\right)$.

设 $u_n = x_n - y_n$, $v_n = x_n + \dfrac{1}{3}y_n$，则 $u_n = -2u_{n-1}$, $v_n = 2v_{n-1}$,

且 $u_1 = x_1 - y_1 = 1$, $v_1 = x_1 + \dfrac{1}{3}y_1 = 1$. 所 以,

$$u_n = (-2)^{n-1}, \ v_n = 2^{n-1}.$$

这样有
$$\begin{cases} x_n - y_n = (-2)^{n-1}, \\ x_n + \dfrac{1}{3}y_n = 2^{n-1}, \end{cases}$$

由此可以求得

$$\begin{cases} x_n = (-2)^{n-3} + 3\cdot 2^{n-3}, \\ y_n = 3\cdot 2^{n-3} - 3(-2)^{n-3}. \end{cases}$$

【例 2】 解差分方程组

$$\begin{cases} x_n = -3x_{n-1} - 4y_{n-1} + n, & ① \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} - 2, & ② \end{cases}$$

$x_1 = y_1 = 1$.

解 将②乘上常数 α 再加①，得

$$x_n + \alpha y_n = (\alpha - 3)x_{n-1} + (\alpha - 4)y_{n-1} + (n - 2\alpha).$$

由 $\dfrac{\alpha-3}{1} = \dfrac{\alpha-4}{\alpha}$，解得二重根 $\alpha = 2$. 因此有

$$x_n + 2y_n = -(x_{n-1} + 2y_{n-1}) + (n - 4).$$

令 $x_n + 2y_n = u_n$，则 $u_n = -u_{n-1} + (n-4)$，$u_1 = x_1 + 2y_1 = 3$. 按第四节的方法，这个方程可以化为一个特征根为 $-1, 1, 1$ 的齐次方程. 这样，便可以设

$$u_n = c_1 + c_2 n + c_3(-1)^n.$$

另外，又有 $u_2 = -3 + (2-4) = -5$，$u_3 = 5 + (3-4) = 4$，我们便能求得

$$u_n = -\frac{7}{4} + \frac{n}{2} - \frac{17}{4}(-1)^n.$$

即

$$x_n + 2y_n = -\frac{7}{4} + \frac{n}{2} - \frac{17}{4}(-1)^n. \tag{9.6}$$

将它改写成 $x_n = -2y_n - \dfrac{7}{4} + \dfrac{n}{2} - \dfrac{17}{4}(-1)^n$，也就有

$$x_{n-1} = -2y_{n-1} - \frac{7}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{17}{4}(-1)^{n-1}.$$

代入原方程组的②，可得到

$$y_n = -y_{n-1} + \frac{n}{2} - \frac{17}{4} + \frac{17}{4}(-1)^n.$$

仍按第四节的方法，解得

$$y_n = \frac{n}{4} - 2 + (-1)^n\left(\frac{17}{4}n - 7\right).$$

再代入(9.6)，求出 x_n. 于是方程组的解为

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{9}{4}+(-1)^n\left(\dfrac{39}{4}-\dfrac{17}{2}n\right), \\ y_n=\dfrac{n}{4}-2+(-1)^n\left(\dfrac{17}{4}n-7\right). \end{cases}$$

【例 3】 解差分方程组

$$\begin{cases} x_n=x_{n-1}-2y_{n-1}+1, & ① \\ y_n=x_{n-1}-y_{n-1}-2, & ② \end{cases} \tag{9.7}$$

$x_0=2$, $y_0=\dfrac{1}{2}$.

解 对方程①和②右边的常数项，虽然可像例2那样处理，但会给后面的解方程带来计算上的麻烦. 所以我们可以先消去常数项.

设
$$\begin{cases} x_n=X_n+\alpha, \\ y_n=Y_n+\beta, \end{cases}$$
代入(9.7),

$$\begin{cases} X_n+\alpha=X_{n-1}+\alpha-2Y_{n-1}-2\beta+1, \\ Y_n+\beta=X_{n-1}+\alpha-Y_{n-1}-\beta-2, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} X_n=X_{n-1}-2Y_{n-1}+(1-2\beta), \\ Y_n=X_{n-1}-Y_{n-1}+(\alpha-2\beta-2). \end{cases}$$

令
$$\begin{cases} 1-2\beta=0, \\ \alpha-2\beta-2=0, \end{cases}$$

得 $\alpha=3$, $\beta=\dfrac{1}{2}$. 此时有

$$\begin{cases} x_n=X_n+3, \\ y_n=Y_n+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

接下来，解方程组

$$\begin{cases} X_n=X_{n-1}-2Y_{n-1}, \\ Y_n=X_{n-1}-Y_{n-1}. \end{cases}$$

由 $X_n+\lambda Y_n=(1+\lambda)X_{n-1}+(-\lambda-2)Y_{n-1}$，令

$$1+\lambda=\frac{-\lambda-2}{\lambda},$$

即
$$\lambda^2+2\lambda+2=0,$$

得，$\lambda=-1\pm i$. 于是，设

$$u_n=X_n+(-1+i)Y_n,$$
$$v_n=X_n+(-1-i)Y_n,$$

有
$$u_n=iu_{n-1},$$

$$u_0=X_0+(-1+i)Y_0$$
$$=x_0-3+(-1+i)\left(y_0-\frac{1}{2}\right)=-1;$$

$$v_n=-iv_{n-1},$$

$$v_0=X_0+(-1-i)Y_0$$
$$=x_0-3+(-1-i)\left(y_0-\frac{1}{2}\right)=-1.$$

所以，
$$u_n=-i^n=-\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right),$$
$$v_n=-(-i)^n=-\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

即
$$X_n+(-1+i)Y_n=-\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right),$$
$$X_n+(-1-i)Y_n=-\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

将两式相加，有 $2X_n-2Y_n=-2\cos\frac{n\pi}{2}$，即 $X_n-Y_n=-\cos\frac{n\pi}{2}$；再将两式相减，又有 $2iY_n=-2i\sin\frac{n\pi}{2}$，即 $Y_n=-\sin\frac{n\pi}{2}$. 这样，$X_n=-\sin\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}$. 最后得出 (9.7)的初始条件解为

$$\begin{cases} x_n = 3 - \sin\dfrac{n\pi}{2} - \cos\dfrac{n\pi}{2}, \\ y_n = \dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{n\pi}{2}. \end{cases}$$

由以上三个例题，我们可以作出以下小结：

1．解线性齐次差分方程组

$$\begin{cases} x_n = a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1}, \\ y_n = a_2 x_{n-1} + b_2 y_{n-1}, \end{cases} \tag{9.8}$$

其中 a_1, a_2, b_1, b_2 为常数，且 $a_2 b_1 \neq 0$. 可以先解方程

$$a_1 + a_2 \alpha = \frac{b_1 + b_2 \alpha}{\alpha}. \tag{9.9}$$

若(9.9)有两个不等根 α_1 和 α_2，则令 $x_n + \alpha_1 y_n$ 和 $x_n + \alpha_2 y_n$ 为 u_n 和 v_n，u_n、v_n 便分别满足一个一阶常系数线性齐次差分方程．根据等比数列的通项公式(1.11)，写出 u_n，v_n 的表达式后，只需再解一个关于 x_n，y_n 的二元线性方程组．

若(9.9)有重根 α_0，则令 $u_n = x_n + \alpha_0 y_n$，求出 u_n，也就有了 $x_n + \alpha_0 y_n$ 的解析表达式．将它作适当的整理后，代入(9.8)中任何一个方程，消去 x_n 或 y_n，又可以得到一个一阶常系数线性差分方程．再按第四节的方法，必能求得(9.8)的解．

2．解差分方程组

$$\begin{cases} x_n = a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + f(n), \\ y_n = a_2 x_{n-1} + b_2 y_{n-1} + g(n), \end{cases} \tag{9.10}$$

其中 $f(n)$，$g(n)$ 是 n 的已知函数，且 $f(n)$ 与 $g(n)$ 中至少有一个不恒等于零．仍可以先解方程(9.9)．若得到两个不等根 α_1，α_2，还是令 $u_n = x_n + \alpha_1 y_n$，$v_n = x_n + \alpha_2 y_n$．此时，u_n，v_n 便分别满足一个常系数线性差分方程．而能否求出 u_n，v_n 的表达式，与 $f(n)$，$g(n)$ 的形式有关．解法可参照第四节．至于

方程(9.9)有重根的情形，读者正好可以按照例2的过程自己写出结论.

上面讨论的虽然只是含有两个未知函数的常系数线性差分方程组的解法，但从理论上来说，方法同样也适用于未知函数更多的差分方程组. 只是由于计算量的大大增加，有必要采用更好的方法，这就需要引用线性代数的知识. 具有这一基础的读者，可以参看附录 III.

关于其他类型的差分方程组，例如线性非齐次的，非线性的等，常常可以通过换元的方法，转化为只有一个未知函数的方程或已研究过的方程组来解.

下面，让我们来看几个应用题.

【例 4】 求出下列三个和：

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots,$$
$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots,$$
$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots.$$

解 这三个和若要一个一个地单独求，是十分困难的. 注意到它们中所有组合数的下标都是 n，而上标分别构成一个以 3 为公差的等差数列，所以可以用差分方程组方法将三个求和一起完成.

设
$$x_n=C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots,$$
$$y_n=C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots,$$
$$z_n=C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots.$$

则
$$x_n=C_{n-1}^0+(C_{n-1}^3+C_{n-1}^2)+(C_{n-1}^6+C_{n-1}^5)+\cdots=x_{n-1}+z_{n-1}.$$

同理，还有 $y_n=y_{n-1}+x_{n-1}$ 和 $z_n=z_{n-1}+y_{n-1}$. 这就得到了一个差分方程组

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1}, \\ y_n = y_{n-1} + x_{n-1}, \\ z_n = z_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases}$$

并有初始条件 $x_1 = C_1^0 = 1$, $y_1 = C_1^1 = 1$, $z_1 = 0$.

由

$$x_n + \alpha y_n + \beta z_n = (1+\alpha)x_{n-1} + (\alpha+\beta)y_{n-1} + (1+\beta)z_{n-1}, \tag{9.11}$$

令
$$\frac{1+\alpha}{1} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{1+\beta}{\beta},$$

取这个方程组三组解

$$\begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \omega^{*}, \\ \beta = \omega^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \omega^2, \\ \beta = \omega, \end{cases}$$

代入(9.11), 有 $x_n + y_n + z_n = 2(x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1})$,

则
$$x_n + y_n + z_n = 2^{n-1}(x_1 + y_1 + z_1) = 2^n,$$

而
$$x_n + \omega y_n + \omega^2 z_n = (1+\omega)(x_{n-1} + \omega y_{n-1} + \omega^2 z_{n-1}),$$

因此
$$x_n + \omega y_n + \omega^2 z_n = (1+\omega)^{n-1}(x_1 + \omega y_1 + \omega^2 z_1) = (1+\omega)^n;$$

$$x_n + \omega^2 y_n + \omega z_n = (1+\omega^2)(x_{n-1} + \omega^2 y_{n-1} + \omega z_{n-1}),$$

因此还有
$$x_n + \omega^2 y_n + \omega z_n = (1+\omega^2)^n,$$

注意到 $1+\omega+\omega^2 = 0$, 又有

$$(1+\omega)^n = (-\omega^2)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3},$$

$$(1+\omega^2)^n = (-\omega)^n = \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3},$$

---

* ω 为三次单位根 $\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

所以
$$\begin{cases} x_n+y_n+z_n=2^n, \\ x_n+\omega y_n+\omega^2 z_n=\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}, \\ x_n+\omega^2 y_n+\omega z_n=\cos\dfrac{n\pi}{3}-i\sin\dfrac{n\pi}{3}. \end{cases}$$

三式相加，得到$3x_n=2^n+2\cos\dfrac{n\pi}{3}$，于是

$$x_n=\frac{2^n+\cos\dfrac{n\pi}{3}}{3},$$

$$\begin{aligned} z_n&=x_{n+1}-x_n \\ &=\frac{1}{3}\left[2^{n+1}+2\cos\frac{(n+1)\pi}{3}-2^n-2\cos\frac{n\pi}{3}\right] \\ &=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right], \end{aligned}$$

$$y_n=2^n-x_n-z_n=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right].$$

这样，便得出了

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{2^n+2\cos\dfrac{n\pi}{3}}{3},$$

$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{2^n+2\cos\dfrac{(n-2)\pi}{3}}{3},$$

$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{2^n+2\cos\dfrac{(n+2)\pi}{3}}{3}.$$

【例5】 给定三个正数a, b, c，对它们两两作几何平均，得到三个数之后，再两两作几何平均，并一直这样做下去．证明：这样得到的数，可以组成三个收敛的无穷数列，并求出这

三个数列的极限.

解 设第 n 次作出的三个几何平均数为 a_n, b_n, c_n, 对它们两两作几何平均, 为 $\sqrt{b_nc_n}$, $\sqrt{a_nc_n}$, $\sqrt{b_na_n}$, 将它们记作 a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}. 于是得到差分方程组

$$\begin{cases} a_{n+1}=\sqrt{b_nc_n}, \\ b_{n+1}=\sqrt{c_na_n}, \\ c_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}. \end{cases} \tag{9.12}$$

将三个方程两边分别相乘, 得到

$$a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}=a_nb_nc_n.$$

这就是说, 每次得到的三个数之积与前一次相等, 因而这个积为常数. 所以

$$a_nb_nc_n=a_1b_1c_1=\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}\cdot\sqrt{ab}=abc, \tag{9.13}$$

又, $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{b_nc_n}}{\sqrt{c_na_n}}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 这样, 有

$$\frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\cdots=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\to 1.$$

(当$n\to\infty$时)

同理, $\dfrac{a_n}{c_n}\to 1$(当 $n\to\infty$ 时). 于是, 由(9.13),

$$\frac{a_n^3}{abc}=\frac{a_n^3}{a_nb_nc_n}=\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{a_n}{c_n},$$

可见$\left\{\dfrac{a_n^3}{abc}\right\}$也是收敛的. 再根据数列极限的有关性质可知, $\{a_n\}$是收敛的. 同理, $\{b_n\}$、$\{c_n\}$也都收敛.

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{abc}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{a_n}{c_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt[3]{abc}$.

这就是说，这三个数列的极限都是 a, b, c 三数的几何平均. 这个方程组(9.12)，也可以用取对数的方法化成线性方程组来研究其极限性质.

本节另一个方面的内容，是偏差分方程的解法和应用.

如果说，差分方程组是在未知函数的个数上对差分方程的推广，则偏差分方程就是在自变量个数上的推广. 当差分方程中出现了多于一个的自变量时，我们就称之为*偏差分方程*. 如

$$f(m, n) = f(m-1, n) + 2f(m, n-1) + f(m-1, n-1). \quad (9.14)$$

在(9.14)中，f 同时是整变量 m, n 的函数. 这样的二元函数，尽管中学教材中并未专门讨论，但下面的例题就能说明，它并非与中学数学知识毫无关联. 为了与偏差分方程作出区别，我们常把只含一个自变量的差分方程叫做*常差分方程*.

一般来说，偏差分方程的初始条件并不是一、两个等式(函数值). 例如，仅给定 $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ 的值，由(9.14)只能写出 $f(1, 1)$ 的值，却不能再确定其余的函数值了. 但如果给出

$$f(m, 0) = f(0, n) = 1, \ (m \geqslant 0, \ n \geqslant 0) \quad (9.15)$$

则由(9.14)就能确定二元函数 $f(m, n)$. 此时(9.15)实际上给出了一列等式:

$$f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(2, 0) = f(0, 2) = \cdots = 1.$$

所以当 $m>0$ 且 $n>0$ 时，可以由(9.14)推算而求得 $f(m,$

n).

由此我们可以看出，偏差分方程初始条件通常与方程的形式有关. 与常差分方程相比,要复杂得多. 有时也把它称作边界条件.

解偏差分方程,也比解常差分方程更困难,更复杂. 在这里,我们仅介绍一些靠观察、归纳便可以找到答案的，或可以转化为常差分方程来解的偏差分方程.

【例 6】 已知对任何非负整数 m, n, 有

$$f(m, 0)=f(0, n)=0$$

和
$$f(m+1, n+1)=f(m, n)+1,$$

求$f(m, n)$的表达式.

解 用列表的办法观察$f(m, n)$随 m, n 变化的规律性：

$f(m, n)$ m \ n	0	1	2	3	4	…
0	0	0	0	0	0	…
1	0	1	1	1	1	…
2	0	1	2	2	2	…
3	0	1	2	3	3	…
4	0	1	2	3	4	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

表 9.1

表 9.1 的最上一行与最左一列之所以全是零，是根据

$$f(m, 0)=f(0, n)=0$$

给出的；而 $f(m+1, n+1)=f(m, n)+1$ 就是使中间每个数比它左上方的数增大 1.

从表 9.1 中我们不难看出，当 $m \geqslant n$ 时，$f(m, n)=n$；当 $m<n$ 时，$f(m, n)=m$. 所以 $f(m, n)$ 总是与 m，n 中较小的一个数相等，即 $f(m, n)=\min\{m, n\}$，

也可以表示为 $f(m, n)=\dfrac{m+n-|m-n|}{2}$.

【例 7】 求偏差分方程

$$f(m+1, n)=af(m, n+1) \tag{9.16}$$

解的一般形式. 这里，a 是非零常数.

解 令 $t=m+n$，及 $f(m, n)=f(m, t-m)=h(m, t)$. 于是，

$$\begin{aligned} h(m+1, t) &= f(m+1, t-m-1) \\ &= af(m, t-m)=ah(m, t). \end{aligned} \tag{9.17}$$

注意到(9.17)的首尾两式，我们可以将 t 看作参变量，便可以像解关于 m 的常差分方程一样，得到

$$h(m, t)=a^m h(0, t),$$

$h(0, t)$ 是一个仅随变量 t 而变化的函数，因而可以将它记作一个关于 t 的一元函数 $g(t)$，即 $g(t)=h(0, t)$. 这样，有

$$f(m, n)=h(m, t)=a^m g(t)=a^m g(m+n).$$

这就是说，方程(9.16)解的一般形式为

$$f(m, n)=a^m g(m+n),$$

其中 g 是任意的单变量函数.

【例 8】 图 9.1 是一个用铁丝编成的矩形网状框子，它

的尺寸是 8×5. 有一条小虫, 从 A 点出发, 沿铁丝爬向 B 点. 这条小虫有多少条可以选择的最短途径?

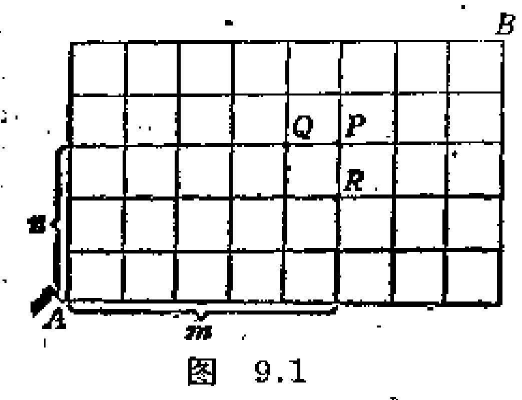


图 9.1

初看上去, 这是一个难寻规律的问题. 但有一点可以肯定, 就是小虫只能向右或向上爬, 否则一定要绕路. 而如果我们想到, 可以把这个问题表示为一个偏差分方程时, 便有了解题的眉目.

解 在框子中间, 任取一个交叉点 P. 设 P 到左边框的距离为 m, 到下边框的距离为 n.

小虫从 A 爬到 P, 一定要经过 P 左边的交叉点 Q 或 P 下边的交叉点 R. 而 Q, R 到 P 的最短途径都只有一条. 因此, A 爬到 P 的最短途径条数, 是到 Q 和到 R 的最短途径之和. 这个关系可以写成

$$f(m,\ n)=f(m-1,\ n)+f(m,\ n-1), \qquad (9.18)$$

这里, $f(i,\ j)$表示从 A 到交叉点$(i,\ j)$最短途径的条数.

方程(9.18)的初始条件应为

$$f(m,\ 0)=f(0,\ n)=1. \ (m,\ n\geqslant0) \qquad (9.19)$$

因为当小虫只沿左边框或下边框爬行到任何一个交叉点, 都只有一条路.

我们再根据(9.18)和(9.19)列表 9.2 观察.

把这个表按顺时针方向旋转 45°, 就会发现它正是杨辉三角形! 这是巧合吗?

注意一下方程(9.18), 它实际上要求我们列表时, 中间每个数都等于它左边的数与上方的数之和. 而旋转后, 这个事实就变成"等于它两肩上的二数之和"了. 另外, (9.19)使得

$f(m,n)$ m / n	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70

表 9.2

表 9.2 左边的一列和上边的一行所有各数均为 1，旋转后也与杨辉三角形相同．难怪我们会得到这么一个特别的结果了．

现在，要写出 $f(m, n)$，可以在表 9.2 中按“左下—右上”方向用斜线将各数连成行，并将左上角的 1 看作第 0 行，则 $f(m, n)$ 是在第 $m+n$ 个斜行．这一斜行上是 C_{m+n}^0，C_{m+n}^1，…，C_{m+n}^{m+n}．而 $f(m+n)$ 是其中第 $m+1$ 个，所以

$$f(m, n)=C_{m+n}^m.$$

这就是说，小虫爬到 B 点的最短途径共有

$$f(8, 5)=C_{8+5}^8=1287 \text{ 条}.$$

也许我们会提出这样的问题：为什么恰好有 $f(m, n)=C_{m+n}^m$？其实，只要这样考虑，问题会解决得更简单：

将连结两个相邻交叉点的铁丝看作一段，则小虫从 A 到 P 要爬 $m+n$ 段．其中有 m 段是向右的，剩下的则全是向上的．从 $m+n$ 段中任取出 m 段向右，不正好是 C_{m+n}^m 种取法

么？这一回你会恍然大悟了．——不过起先我们并不容易这样去考虑．

从例 8 的解决过程中我们看到，杨辉三角形使得偏差分方程(9.18)与组合数之间建立了关系．其实在第一节中，(1.12)就是一个具有这种关系的例子．若按本节的记法，可以将它写成

$$f(m,\ n+1)=f(m,\ n)+f(m-1,\ n). \qquad (9.20)$$

也正是因为这个原因，我们曾说道，可以把(1.12)看作一个偏差分方程．

在例 8 的基础上，我们还可以解决"可重复组合"的组合数求法问题．

从中学数学教材中，我们可以得到以下关于排列、组合的结论：

从 n 个不同元素中，任取出 m 个元素：

(1) 作可重复排列，排列数为 n^m；

(2) 作不可重复排列，排列数为 P_n^m；

(3) 作不可重复组合，组合数为 C_n^m．

可以看出，只剩下作可重复组合的组合数怎么求的问题了．

这个问题可以这样提出：

一箱标有号码 1，2，…，n 的小球，每种个数都不少于 m，要从中任意取出 m 个球(号码可以相同)，共有多少种不同的取法？

我们设取法有 $f(m,\ n)$ 种，并将这 $f(m,\ n)$ 种取法分成两类：一类是没有 n 号球的，这就只能从标有号码 1，2，…，$n-1$ 的 $n-1$ 种球中取出 m 个，于是应有 $f(m,\ n-1)$ 种取法；另一类是至少有一个 n 号球的，此时对取出的另外 $m-1$ 个

球，由于号码可以是1, 2, …, n，共应有 $f(m-1, n)$ 种取法. 显然这两类情况的全体就是所有的取法. 因此有

$$f(m, n)=f(m, n-1)+f(m-1, n),$$

这正是方程(9.18). 我们还需要确定它的初始条件.

当 $n=1$，即只有一种球时，无论取多少个，取出的全是同一种球，也就只有一种取法，这就是 $f(m, 1)=1(m\geqslant 1)$；若 $m=1$，应有 $f(1, n)=n(n\geqslant 1)$. 因为从 n 种不同的球中任取一个，有 n 种不同的取法. 为使这个条件与例8更接近些，我们可以"逆推"出 $f(0, n)$. 由(9.18)可以得到

$$\begin{aligned} f(0, n) &= f(1, n)-f(1, n-1) \\ &= n-(n-1)=1. \end{aligned}$$

现在，除了初始条件中的 $f(m, 1)=1$ 与例8的(9.19)稍有不同外，其他情况都一样了. 因此，得到

$$f(m, n+1)=C_{m+n}^{m},$$

即

$$f(m, n)=C_{m+n-1}^{m}. \tag{9.21}$$

这就是说，共有 C_{m+n-1}^{m} 种不同的取法. 这个问题的结论还可以用多种方法求得. 在参考文献[9]中，就给出了三种不同的求法.

"可重复组合"问题，除了前面给出的表达方式之外，还有一些与之等价的形式. 如：

从标有号码1, 2, …, n 的 n 个球中，任取一个记下号码并放回，如此反复进行 m 次，不计记下的号码的先后次序，一共可以有多少种不同的记录结果？

又如：把 m 个相同的球放入 n 个不同的箱子里，有多少种不同的放法？

这些问题都满足方程(9.18)及初始条件

$$f(m, 1)=1 \quad (m\geqslant 1),$$
$$f(1, n)=n \quad (n\geqslant 1)$$
(请读者自己解释理由),因此得出的结果都应是 C_{m+n-1}^{m}.

最后,让我们再来看下面的例题.

【例 9】 二元整变量函数 $f(m, n)$满足
$$f(m+1, n)=f(m, n)-f(m, n-1) \qquad (9.22)$$
及 $f(m, 0)=f(0, n)=1(m, n\geqslant 0)$. 求 $\sum\limits_{k=0}^{m} f(m+4, k)$.

解 由(9.22),
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(m+1, k) &= \sum_{k=1}^{n}[f(m, k)-f(m, k-1)]\\ &= f(m, n)-f(m, 0)\\ &= f(m, n)-1,\end{aligned}$$
也就是 $f(m, n)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(m+1, k)+1=\sum\limits_{k=0}^{n} f(m+1, k)$. 于是有
$$\sum_{k=0}^{m} f(m+4, k)=f(m+3, m).$$
列表观察:

表 9.3 中,除了第一行和第一列上全是 1, 按(9.22), 中间每个数都是它左边的数减去左上方的数之差. 因此, 主对角线上及其以下部分(除了 $m=0$)均为零.而主对角线的上一斜行,是 1, -1, 1, -1, …交错变化, 即
$$f(m+1, m)=(-1)^{m}.$$
这样,
$$\begin{aligned}f(m+2, m) &= f(m+1, m)-f(m+1, m-1)\\ &= (-1)^{m}-f(m+1, m-1).\end{aligned}$$
令 $f(m+1, m-1)=a_{m}$, 便得到$a_{m+1}=(-1)^{m}-a_{m}$. 这是一个常差分方程,且有 $a_{1}=f(2, 0)=1$,所以

$f(m,n)$ n \ m	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
2	1	0	0	1	3	6	10
3	1	0	0	0	−1	−4	−10
4	1	0	0	0	0	1	5
5	1	0	0	0	0	0	−1
							(主对角线)

表 9.3

$$a_m = m(-1)^{m+1},$$

即 $$f(m+1,\ m-1) = m(-1)^{m+1}.$$

再由

$$f(m+3,\ m) = f(m+2,\ m) - f(m+2,\ m-1)$$
$$= (m+1)(-1)^m - f(m+2,\ m-1),$$

并令 $f(m+3,\ m) = b_m$，又有 $b_m = (m+1)(-1)^m - b_{m-1}$，而

$$b_0 = 1.$$

所以 $$b_m = (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

也就是

$$\sum_{k=0}^{m} f(m+4,\ k)=f(m+3,\ m)$$

$$=(-1)^m\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

习 题 八

1. 解下列差分方程组:

(1) $\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+4y_n, \\ y_{n+1}=2x_n+y_n, \end{cases}$ $x_1=y_1=1$;

(2) $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-y_n, \\ y_{n+1}=x_n+4y_n, \end{cases}$ $x_1=1,\ y_1=2$;

(3) $\begin{cases} x_n=2x_{n-1}-3y_{n-1}, \\ y_n=x_{n-1}-y_{n-1}, \end{cases}$ $x_0=y_0=1$;

(4) $\begin{cases} x_n=-y_{n-1}+z_{n-1}, \\ y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1}, \\ z_n=2x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1}, \end{cases}$ $x_1=y_1=z_1=1$.

2. 解下列差分方程组:

(1) $\begin{cases} a_n=4a_{n-1}-b_{n-1}-5, \\ b_n=-2a_{n-1}+3b_{n-1}+6, \end{cases}$ $a_1=b_1=0$;

(2) $\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+2b_{n-1}-3, \\ b_n=a_{n-1}+3b_{n-1}+2^{2n-1}, \end{cases}$ $a_0=b_0=0$.

3. 求和:

(1) $C_n^0+2C_n^2+2^2C_n^4+\cdots+2^kC_n^{2k}+\cdots$;

(2) $C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots$.

4. 用两种方法证明:

$(C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots)^2+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\cdots)^2=2^n$.

5. 用解差分方程组的方法求

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sin k\alpha \text{ 和 } \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos k\alpha,$$

其中 α 是常数，且 $\alpha\neq\frac{m\pi}{2}$ (m 是整数).

6. 定义二元多项式序列 $f_n(x,\ y)$ 和 $g_n(x,\ y)$ 如下:

$$\begin{cases} f_{n+1}(x, y) = xf_n(x, y) - yg_n(x, y), \\ g_{n+1}(x, y) = yf_n(x, y) - xg_n(x, y), \end{cases}$$

且 $f_0(x, y) = 1$, $g_0(x, y) = 0$.

(1) 求 $f_n(x, y)$ 和 $g_n(x, y)$;

(2) 求方程组 $f_n(x, y) = g_n(x, y) = 1$ 的所有实数解.

7. 任意给定四个实数 a, b, c, d. 对其中任何三个作出它们的算术平均数，得到四个算术平均数. 再对其中每三个作出算术平均数，并将上述过程一直重复下去.

(1) 证明：这些算术平均数可以组成四个收敛的无穷数列;

(2) 求出这四个数列的极限.

8. 解下列偏差分方程：

(1) $f(m+1, n+1) = f(m, n) + \dfrac{m-n}{m(m+1)}$, $f(m, 1) = \dfrac{1}{m}$, $f(1, n) = n$; (m, n 是任意自然数)

(2) $2f(m+1, n) + f(m, n+1) = 0$,

$$f(0, n) = 2^n, \quad f(m, 0) = (-1)^m.$$

(m, n 为非负整数)

9. 设 $f(m, n) = f(m-1, n) + f(m, n-1) + f(m-1, n-1)$, $(m, n > 1)$. 且 $f(m, 1) = f(1, n) = 1 \quad (m, n \geq 1)$. 若

$$S(n) = \sum_{\substack{a+b=n \\ a\geq 1, b\geq 1}} f(a, b),$$

求证: $S(n+2) = S(n) + 2S(n+1)$.

10. (1) 观察表 9.3，将 $f(m, n)$ $(m > 0)$ 用组合数形式表示;

(2) 用方程(9.22)及其初始条件验证你的结论.

11. (第 22 届国际中学生数学竞赛题) 设二元函数 $f(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} f(0, y) = y+1, \\ f(x+1, 0) = f(x, 1), \\ f(x+1, y+1) = f[x, f(x+1, y)]. \end{cases} \qquad (x, y \geq 0),$$

求 $f(4, 1981)$.

12. 从有穷数列 1, 2, …, n 中任意选出不同的 m 项，要求选出的任意两项不相邻. 共有多少种不同的选法?

*13. 给定一个凸 n 边形，用 m 种不同颜色的彩笔将每边各涂一种

颜色．如果相邻的两边要涂上不同的颜色，共有多少种不同的涂法？

14．n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的所有次数为m且系数为1的单项式共有多少个？次数不大于m的单项式又有多少个？

15．若u_n, v_n满足差分方程组

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1}, \\ v_n = cu_{n-1} + dv_{n-1}. \end{cases}$$

证明，分式线性差分方程(8.7)在初始条件$x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$下的解为

$$x_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

十、一些应用题

差分方程的应用，是个容易引起人们兴趣的内容．因为它解决问题的方法独具特色，涉及的范围又很广．前面第六节的求和就是一个方面．

有些应用问题，看上去并不容易想到可以使用差分方程来解答．下面举几个例子．通过它们，会使我们体会到怎样"应用差分方程"和"想到用差分方程"的．

【例 1】 (1) 平面上的 n 条直线，最多可以把这个平面划分成多少个部分？

(2) 空间的 n 个平面，最多可以把空间划分成多少个部分？

解 (1) 要想使平面被划分的部分达到最多，必须每两条直线都相交，且每三条直线都不共点．

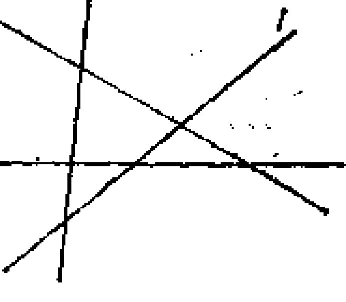


图 10.1

设 n 条这样的直线将平面划分成 a_n 个部分．现在我们作第 $n+1$ 条直线 l．它与已有的 n 条直线有 n 个交点．l 被这 n 个交点分成 $n-1$ 条线段和两条射线，它们都把原来的某一个部分划分成两块．因此有了直线 l 之后，划分的块数比 a_n 增加了 $n+1$．这个事实可以表示为

$$a_{n+1}=a_n+(n+1).$$

它是一个一阶常系数线性差分方程．

当平面上只有一条直线时（即 $n=1$ 时），平面被划分成两部分，也就是 $a_1=2$. 这样，按第六节的求和方法可以解得

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

因此，平面最多应被划分成 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 个部分.

(2) 当这 n 个平面每两个都相交，每三个都不共线，每四个都不共点，且所有交线都相互不平行时，才能使空间划分成的部分最多.

我们设 n 个这样的平面将空间划分成 b_n 个部分. 现在作第 $n+1$ 个平面 α. α 与已有的 n 个平面交于 n 条直线. 这些交线两两不平行，且任意三条不共点(否则这一点同时在四个平面上). 由(1)的结论可知，α 被这 n 条交线划分成 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 个部分. 而每个部分都将原来的 b_n 个部分中的一个划分为二. 于是，就增加了 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 个部分. 即

$$b_{n+1}=b_n+\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

另外，$b_1=2$. 因为一个平面将空间分成两部分.

由这个方程及其初始条件，可以解得

$$b_n=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1,$$

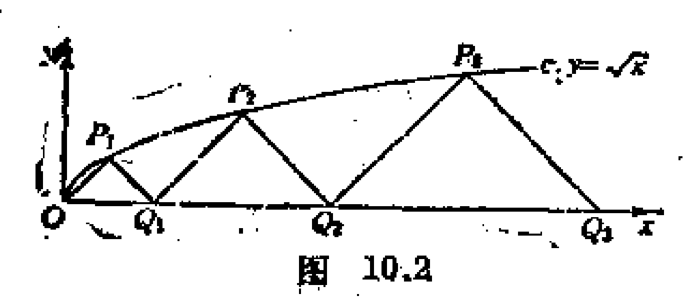


图 10.2

就是说，空间应被划分成 $\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1$ 个部分.

【例 2】 如图 10.2，在直角坐标系 xOy 中，曲线 c 的方程为 $y=\sqrt{x}$. 作等腰直角三角形 OP_1Q_1，其直角顶点 P_1 在曲线 c 上，Q_1 在 x 轴上；再作等腰直角三角形 $Q_1P_2Q_2$，使直角顶点 P_2 在 c 上，Q_2 在 x 轴上，以后一直这样作下去，得到一列等腰直角三角形：

$$\triangle OP_1Q_1,\ \triangle Q_1P_2Q_2,\ \cdots,\ \triangle Q_{n-1}P_nQ_n,\ \cdots$$

求点 Q_n 的横坐标.

解 设 $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ 的斜边长为 $x_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，并将 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ 记作 S_n. 则 Q_n 的横坐标就是 S_n. 直线 Q_nP_{n+1} 斜率为 1，所以它的方程为

$$y=x-S_n.$$

P_{n+1} 是曲线 c 与直线 Q_nP_{n+1} 的交点，它的坐标满足

$$\begin{cases} y=x-S_n, \\ y=\sqrt{x}, \end{cases}$$

因而有 $x=(x-S_n)^2$. 但 P_{n+1} 在 x 轴上的射影位于 Q_n 和 Q_{n+1} 的中点，所以 P_{n+1} 的横坐标又可表示为 $S_n+\frac{1}{2}x_{n+1}$. 于是有

$$S_n+\frac{1}{2}x_{n+1}=\left(S_n+\frac{1}{2}x_{n+1}-S_n\right)^2,$$

即

$$S_n=\frac{1}{4}x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_{n+1}.$$

根据命题 6.1，$x_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，因而又有

$$x_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{4}x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_{n+1}\right)-\left(\frac{1}{4}x_n^2-\frac{1}{2}x_n\right),$$

即

$$(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)=2(x_{n+1}+x_n).$$

注意到 $x_{n+1}+x_n>0(n=1, 2, \cdots)$，所以可以两边同除以 $x_{n+1}+x_n$，得到

$$x_{n+1}-x_n=2.$$

它说明这一列直角三角形斜边长成等差数列．而由

$$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$$

可求出 P_1 的坐标为(1, 1)，故 $x_1=2$．因此 $x_n=2n$，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{k=1}^{n} 2k=n(n+1),$$

即 Q_n 的横坐标为 $n(n+1)$．

【例3】 已知 $\triangle ABC$ 不是正三角形．分别以 $\triangle ABC$ 的三边为一条边，在它的外侧作正三角形 BCA_1, CAB_1, ABC_1，连结 A_1, B_1, C_1，得到 $\triangle A_1B_1C_1$．然后对 $\triangle A_1B_1C_1$ 重复以上过程，作出 $\triangle A_2B_2C_2$．这样一直作下去，产生一列三角形：

$$\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1,\ \triangle A_2B_2C_2,\ \cdots,\ \triangle A_nB_nC_n,\ \cdots$$

(1) 证明所有的三角形有共同的重心；

(2) 证明，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_nB_n}{B_nC_n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}$ 存在吗？

图 10.3

解 (1) 以 $\triangle ABC$ 的重心为原点，建立复平面．并设 A_n, B_n, C_n 对应的复数分别为 a_n, b_n, $c_n(n=1, 2, \cdots)$．注意到复数的向量表示及

$$\overrightarrow{OC_n}=\overrightarrow{OB_{n-1}}+\overrightarrow{B_{n-1}C_n},$$

则有

$$c_n=b_{n-1}+\eta(a_{n-1}-b_{n-1}),$$

其中 $\eta=e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$(即1的六次方根之一). 对称地写出另外的两个方程,便得到差分方程组

$$\begin{cases}a_n=c_{n-1}+\eta(b_{n-1}-c_{n-1}), & ①\\ b_n=a_{n-1}+\eta(c_{n-1}-a_{n-1}), & ②\\ c_n=b_{n-1}+\eta(a_{n-1}-b_{n-1}). & ③\end{cases} \tag{10.1}$$

将①、②、③相加,有

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1},$$

说明这一列三角形中所有三角形的三顶点对应的复数之和不变. 因而有

$$a_n+b_n+c_n=a+b+c,\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

其中 a, b, c 为表示点 A, B, C 的复数. 表示 $\triangle ABC$ 重心的复数是 $\frac{a+b+c}{3}$,重心又是原点,所以 $a+b+c=0$. 故

$$a_n+b_n+c_n=0$$

对任何正整数 n 成立. 因此,这一列三角形的重心都在原点.

(2) 注意到 $1-\eta+\eta^2=0$ 及 $\eta^3=-1$,由方程组(10.1)可得到

$$a_n+\eta b_n=a_{n-1}+\eta b_{n-1},$$

因此,有

$$a_n+\eta b_n=a+\eta b. \tag{10.2}$$

而 $$a_n-\eta^2b_n=(-2)(a_{n-1}-\eta^2b_{n-1}),$$

则又有 $$a_n-\eta^2b_n=(-2)^n(a-\eta^2b),$$

即

$$b_n+\eta a_n=(-2)^n(b+\eta a). \tag{10.3}$$

由(10.2)和(10.3),得

$$(1-\eta)(a_n-b_n)=a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n,$$

而

$$\begin{aligned}A_nB_n&=|a_n-b_n|=|-\eta^2|\cdot|a_n-b_n|\\&=|1-\eta|\cdot|a_n-b_n|=|(1-\eta)(a_n-b_n)|\\&=|a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n|,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|2^n|b+\eta a|-|a+\eta b||&\leqslant A_nB_n\\&\leqslant|a+\eta b|+2^n|b+\eta a|.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}|2^n|c+\eta b|-|b+\eta c||&\leqslant B_nC_n\\&\leqslant|b+\eta c|+2^n|c+\eta b|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{|2^n|b+\eta a|-|a+\eta b||}{|b+\eta c|+2^n|c+\eta b|}&\leqslant\frac{A_nB_n}{B_nC_n}\\&\leqslant\frac{|a+\eta b|+2^n|b+\eta a|}{|2^n|c+\eta b|-|b+\eta c||},\end{aligned}$$

则
$$\frac{|b+\eta a|}{|c+\eta b|}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{A_nB_n}{B_nC_n}\leqslant\frac{|b+\eta a|}{|c+\eta b|}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{A_nB_n}{B_nC_n}&=\left|\frac{b+\eta a}{c+\eta b}\right|=\left|\frac{b+\eta a}{-a-b+\eta b}\right|\\&=\left|\frac{1}{\eta^2}\right|=1.\end{aligned}$$

如果我们根据对称性再写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_nC_n}{C_nA_n}=1$, 就说明了越往后,作出的三角形就越接近于正三角形.

(8)

$$\begin{aligned}\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}&=\frac{|a_{n+1}-b_{n+1}|}{|a_n-b_n|}\\&=\frac{|a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^{n+1}|}{|a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n|}\end{aligned}$$

$$=\left|\frac{3(a+\eta b)}{a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n}-2\right|,$$

于是

$$2-\left|\frac{3(a+\eta b)}{a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n}\right|$$

$$\leqslant\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}\leqslant 2+\left|\frac{3(a+\eta b)}{a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n}\right|.$$

而

$$\frac{3|a+\eta b|}{2^n|b+\eta a|+|a+\eta b|}\leqslant\left|\frac{3(a+\eta b)}{a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n}\right|$$

$$\leqslant\frac{3|a+\eta b|}{2^n|b+\eta a|-|a+\eta b|},$$

并且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a+\eta b|}{2^n|b+\eta a|+|a+\eta b|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3|a+\eta b|}{2^n|b+\eta a|-|a+\eta b|}=0,$$

则 $\left|\frac{3(a+\eta b)}{a+\eta b-(b+\eta a)(-2)^n}\right|$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在且为0.

因此 $\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}=2.$$

以上都是与几何有关的例题.

【例 4】 证明：对任意自然数 n，$[(\sqrt{3}+1)^{2n+1}]$ 能被 2^{n+1} 整除.

证明 令 $a_n=(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n$. 根据第三节的有关内容，我们可以写出一个 a_n 满足的二阶常系数线性齐次差分方程. 这个方程的特征根应为 $1+\sqrt{3}$ 和 $1-\sqrt{3}$，因此，特征多项式为

$$(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})=x^2-2x-2,$$

差分方程为 $$a_n=2(a_{n-1}+a_{n-2}),$$

初始条件为 $a_1=2$, $a_2=8$. 我们用数学归纳法证明 $2^{n+1}|a_{2n+1}$ 且 $2^{n+1}|a_{2n+2}$.

1．当 $n=0$ 时，$2|a_1$, $2|a_2$ 都成立；

2．假设当 $n=k-1$ 时($k\geqslant1$)，$2^k|a_{2k-1}$, $2^k|a_{2k}$ 都成立，则当 $n=k$ 时，由于

$$a_{2k+1}=2(a_{2k}+a_{2k-1}),$$

$$a_{2k+2}=2(a_{2k+1}+a_{2k})=2(3a_{2k}+2a_{2k-1}),$$

可见 $2^{k+1}|a_{2k+1}$, $2^{k+1}|a_{2k+2}$ 都成立. 因此 $2^{n+1}|a_{2n+1}$ 对任意自然数 n 成立.

又，由于$0<(\sqrt{3}-1)^{2n+1}<1$，由

$$(\sqrt{3}+1)^{2n+1}=a_{2n+1}+(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$$

便有

$$[(\sqrt{3}+1)^{2n+1}]=[a_{2n+1}+(\sqrt{3}-1)^{2n+1}]=a_{2n+1}.$$

所以，$2^{n+1}|[(\sqrt{3}+1)^{2n+1}]$对任意自然数 n 成立.

这个例题中使用了构造差分方程的方法，而这个差分方程本身易于说明整除结论的成立，它的解又与被除式有密切关系. 这两个因素为命题的证明创造了条件.

【例 5】 证明：对任意自然数n，$\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$一定不能被5整除.

证明 先作一个$\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$满足的常系数线性齐次差分方程.

令 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$. 由二项式定理，

$$(1+2\sqrt{2})^{2n+1}-(1-2\sqrt{2})^{2n+1}$$

$$=2[C_{2n+1}^{1}(2\sqrt{2})+C_{2n+1}^{3}(2\sqrt{2})^{3}+\cdots$$

$$+C_{2n+1}^{2n+1}(2\sqrt{2})^{2n+1}]$$

$$=4\sqrt{2}[C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}(2\sqrt{2})^{2}+\cdots$$

$$+C_{2n+1}^{2n+1}(2\sqrt{2})^{2n}]$$

$$=4\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}8^{k}=4\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k},$$

即得

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(1+2\sqrt{2})^{2n+1}$$

$$-(1-2\sqrt{2})^{2n+1}]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(1+2\sqrt{2})(9+4\sqrt{2})^{n}$$

$$-(1-2\sqrt{2})(9-4\sqrt{2})^{n}],$$

可见 a_n 满足的差分方程特征根为 $9+4\sqrt{2}$ 和 $9-4\sqrt{2}$，特征多项式便为

$$(x-9-4\sqrt{2})(x-9+4\sqrt{2})=x^{2}-18x+49,$$

因而有 $$a_n=18a_{n-1}-49a_{n-2}.$$

我们现在用命题7.2的方法．先注意 $a_1, a_2, \cdots, a_{13}$ 除以5的余数分别是

$$1, 1, 4, 3, 3, 2, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 1, 1. \qquad (10.4)$$

由于 $a_{12}\equiv a_{0}(\bmod 5)$，$a_{13}\equiv a_{1}(\bmod 5)$，而且 a_{12}，a_{13} 又是 $\{a_n\}$ 中的连续两项，用数学归纳法不难证明，$a_{k+12}\equiv a_k(\bmod 5)$ 对所有非负整数 k 成立．这样，$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 除以5的余数构成一个周期为12的数列，因而取值范围就是(10.4)．而在(10.4)中没有零，所以 $\{a_n\}$ 中所有各项除以5的余数均不为零．这就说明，$\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ 对于任意自然数 n，都不能被5

整除.

例5和例4,是差分方程用于整除问题的两例. 下面,我们再来看一个关于"有限连分数"的问题. 与整除问题一样,它也属于数论研究的范围.

一个形如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

的分数叫做一个有限连分数.

【例6】 将有限连分数

$$\left.1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{2}}}}}\right\} 2n-1\text{ 条分数线}$$

表示为一个 n 的函数的形式.

解 将所给的有限连分数记作 a_n. 则

$$\left.a_{n-1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots+\cfrac{1}{2}}}}\right\} 2n-3\text{ 条分数线},$$

于是有

$$a_n=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a_{n-1}}}=\frac{3a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+1}, \qquad (10.5)$$

且
$$a_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

(10.5)是一个分式线性差分方程．按照第八节的方法，由

$$a_n-\lambda=\frac{3a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+1}-\lambda=\frac{(3-2\lambda)a_{n-1}+(1-\lambda)}{2a_{n-1}+1},$$

令 $3-2\lambda=\frac{1-\lambda}{-\lambda}$，得 $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{a_n-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{a_n-\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\left[\frac{3-(1+\sqrt{3})}{3-(1-\sqrt{3})}\right]^{n-1}\cdot\frac{a_1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{a_1-\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n.$$

用合分比定理，得

$$\frac{2a_n-1}{\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n},$$

即 $$a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}+\frac{1}{2}.$$

因此，
$$\left.1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{2}}}}}\right\}2n-1\text{ 条分数线}$$

可以表示为 $$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}+\frac{1}{2}.$$

【例7】 设 $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 证明 $\frac{\alpha}{\pi}$ 不是有理数.

证明 用反证法. 设 $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{m}{n}$，其中 m, n 为正整数. 由

于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 令

$$\xi=\cos\alpha+i\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}},$$

则由棣莫佛定理,

$$\xi^{2n}=\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1.$$

我们只要证明 $\xi^{2n}=1$ 对任何正整数 n 都不可能成立, 就会得到矛盾了.

由于 $\xi^{2n}=(\xi^2)^n=\frac{(-1+2\sqrt{2}\,i)^n}{3^n}$, 我们设

$$(-1+2\sqrt{2}\,i)^n=a_n+b_n\sqrt{2}\,i, \tag{10.6}$$

先证明 a_n, b_n 是整数. 设

$$(-1+2\sqrt{2}\,i)^k=a_k+b_k\sqrt{2}\,i\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

由

$$\begin{aligned}(-1+2\sqrt{2}\,i)^{k+1}&=(-1+2\sqrt{2}\,i)(-1+2\sqrt{2}\,i)^k\\&=(-1+2\sqrt{2}\,i)\,(a_k+b_k\sqrt{2}\,i)\\&=(-a_k-4b_k)+(2a_k-b_k)\sqrt{2}\,i\end{aligned}$$

及 $(-1+2\sqrt{2}\,i)^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}\,i$, 得到差分方程组

$$\begin{cases}a_{k+1}=-a_k-4b_k,\\ b_{k+1}=2a_k-b_k.\end{cases} \tag{10.7}$$

由于 $a_1=-1$, $b_1=2$ 都是整数, 用数学归纳法立即可得出 a_n, b_n 是整数的结论.

更进一步, 我们还可以用(10.7)来证明, 对任意正整数 n, 有

$$a_n\equiv b_n\equiv 2(\text{mod }3). \tag{10.8}$$

仍用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, (10.8)显然已成立. 假设当 $n=k$ 时, (10.8)成立, 则当 $n=k+1$ 时, 由(10.7)便有

$$a_{k+1}\equiv -2-4\times 2\equiv 2 \pmod 3,$$
$$b_{k+1}\equiv 2\times 2-2\equiv 2 \pmod 3,$$
可见(10.8)也成立. 因此(10.8)对任意正整数 n 成立, 当然 b_n 就不会为零了. 这样, $\xi^{2n}\neq 1$, 得出矛盾. 说明 $\frac{\alpha}{\pi}$ 不能表示为任何有理数.

一个数 x 称为一个代数数, 如果它满足一个方程
$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=0.$$
其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都是有理数. (可以参看[10])上面的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 就是一个代数数, 因为它是方程 $x^2-\frac{1}{3}=0$ 的一个根. 在数论中可以证明, 若 $\cos\alpha$ 是代数数, 而 $\frac{\alpha}{\pi}$ 也是代数数, 则 $\frac{\alpha}{\pi}$ 是有理数. 因此, 例 6 的讨论说明 $\frac{\alpha}{\pi}$ 不是代数数.

接下来, 我们再来介绍重要的"牛顿公式". 为此, 有必要先回顾一下韦达定理.

设 $f(x)=x^2+px+q$, 则方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1, x_2 满足
$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q.$$
这些从初中教材中可以了解到. 当 $f(x)$是首项系数为1的 n 次多项式时, 韦达定理应为:

设 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$ (σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n 都是常数), 则方程 $f(x)=0$ 的 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足
$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{1\le j<k\le n}x_jx_k,$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
$$= \sum_{1<j<k<l<n} x_jx_kx_l,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.^*$$

我们把 σ_m 称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 次初等对称多项式 $(m=1, 2, \cdots, n)$.

定理 4 (牛顿公式) 设 $T_m = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$. 则当 $m \geqslant n$ 时,

$$T_m = \sigma_1 T_{m-1} - \sigma_2 T_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-2}\sigma_{m-1} T_{m-n}; \tag{10.9}$$

而当 $0<m<n$ 时,

$$T_m = \sigma_1 T_{m-1} - \sigma_2 T_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-2}\sigma_{m-1} T_1 + (-1)^{m-1} m\sigma_m. \tag{10.10}$$

我们把(10.9)和(10.10)两式合称为牛顿公式. 定理 4 的证明是用差分方程来完成的.

证明 将 $T_1, T_2, \cdots$ 看作一个数列. 根据定理 3, $\{T_m\}$ 满足一个 n 阶常系数线性齐次差分方程, 它的特征根就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 因此, 它的特征多项式为

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n,$$

这就是说, $\{T_m\}$ 满足的差分方程是

$$T_m = \sigma_1 T_{m-1} - \sigma_2 T_{m-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_n T_{m-n},$$

这正是(10.9). 这里, 当 $m=n$ 时, 有 $T_0 = 1+1+\cdots+1 = n$.

当 $0<m<n$ 时, (10.9)仍应成立. 但考虑到左边不含负

---

* 一般情况下的韦达定理, 证明的方法是将

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

展开, 再与 $x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n$ 比较各项系数.

指数幂项，所以右边含有负指数幂的各项的代数和应为零．我们分以下几种情况，讨论如何去掉含负指数幂的所有项：

(1) $m-k<-1$；此时乘积 $\sigma_k T_{m-k}$ 的各项都会含有负指数幂．因为 T_{m-k} 的一般项 x_i^{m-k} 的指数 $m-k\leqslant-2$，而 σ_k 的一般项中 x_i 的次数至多为1，故乘积中 x_i 指数是负的．所以，先将 $m-k<-1$ 时的 $\sigma_k T_{m-k}$ 从(10.9)中的右边全去掉．

(2) 当 $m-k=-1$ 时，由于 $\sigma_k T^{m-k}=\sigma_{m+1}T_{-1}$，所以它的一般项可以表示为 $x_i^{-1}(x_{i_1}, x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$，其中 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中下标互不相同的 k 个数．当且仅当 i 是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 中之一时，这一项不含负指数幂．所以我们留下所有这样的项，而舍去其余者．

于是，对任意给定的一组下标 $i_1<i_2<\cdots<i_m$，在 $\sigma_{m+1}T_{-1}$ 中，必有 $n-m$ 个 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$．它们来自于乘积

$$x_j^{-1}(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_j\cdots x_{i_m}),\ j\neq i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m.$$

因此，根据下标的对称关系及任意性可知，$\sigma_{m+1}T_{-1}$ 中不含负指数幂的部分正好等于 $(n-m)\sigma_m$．这样，

$$\begin{aligned}T_m&=\sigma_1T_{m-1}-\sigma_2T_{m-2}+\cdots+(-1)^{m-1}T_0\sigma_m\\&\quad+(-1)^m(n-m)\sigma_m\\&=\sigma_1T_{m-1}-\sigma_2T_{m-2}+\cdots+(-1)^{m-1}m\sigma_m,\end{aligned}$$

它正是我们要证明的(10.10)．

注意，牛顿公式是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的恒等式．我们可以用它来解决下列问题．

【例8】 已知 $x+y+z=\alpha$, $xy+yz+zx=\beta$, $xyz=\gamma$．用 α, β, γ 表示 $x^3+y^3+z^3$．

解 将 α, β, γ 分别看作牛顿公式中的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$；$x+y+z$, $x^2+y^2+z^2$, $x^3+y^3+z^3$ 看作 T_1, T_2, T_3，则有

$$T_1=\sigma_1=\alpha,$$

$$\begin{aligned}T_2&=\sigma_1T_1-2\sigma_2=\alpha^2-2\beta,\\T_3&=\sigma_1T_2-\sigma_2T_1+3\sigma_3\\&=\alpha(\alpha^2-2\beta)-\beta\alpha+3\gamma\\&=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma,\end{aligned}$$

因此，$x^3+y^3+z^3=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma$.

如果读者愿意试试，可以继续求 $x^4+y^4+z^4$, $x^5+y^5+z^5$, ……也不会有什么困难之处.

【例 9】 解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3,\\x^3+y^3+z^3=3,\\x^5+y^5+z^5=3.\end{cases}\qquad(10.11)$$

解 为了应用牛顿公式，先将方程组写成

$$T_1=T_3=T_5=3.$$

又

$$\begin{aligned}\sigma_1&=T_1=3,\\T_2&=\sigma_1T_1-2\sigma_2=9-2\sigma_2,\\T_3&=\sigma_1T_2-\sigma_2T_1+3\sigma_3\\&=3(9-2\sigma_2)-3\sigma_2+3\sigma_3\\&=27-9\sigma_2+3\sigma_3=3,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\sigma_3&=3\sigma_2-8,\\T_4&=\sigma_1T_3-\sigma_2T_2+\sigma_3T_1\\&=9-\sigma_2(9-2\sigma_2)+3(3\sigma_2-8)\\&=2\sigma_2^2-15,\\T_5&=\sigma_1T_4-\sigma_2T_3+\sigma_3T_2\\&=3(2\sigma_2^2-15)-3\sigma_2\\&\quad+(3\sigma_2-8)(9-2\sigma_2)\\&=40\sigma_2-117=3.\end{aligned}$$

根据上述等式，可求得 $\sigma_2=3$, $\sigma_3=1$. 由韦达定理，x,

y, z 是方程 $x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-\sigma_3=0$, 即 $x^3-3x^2+3x-1=0$ 的三个根. 所以方程组(10.11)仅有解 $x=y=z=1$.

如果不用牛顿公式, 你能解方程组(10.11)吗?

牛顿公式仅解决了用 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n 表示 T_1, T_2, $\cdots$的问题. 更一般的结论是: "关于 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的任何对称多项式都可以表示为 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n 的多项式." 有兴趣的读者可以阅读参考文献[15].

到这里, 我们看到了差分方程在三个方面的应用实例——几何方面、数论问题、牛顿公式的证明. 那么, 我们遇到哪些问题, 可以把差分方程当作可能选用的方法呢? 首先就要看这个问题是否含有或是可以转化为一个整变量函数的问题. 当我们遇到的确实是这样的问题时, 还需要再研究一下, 对于这个整变量, 是否可以找出一个递推的函数关系. 当然, 有时看来问题似乎会与整变量无关, 但却可以构造出这样的关系, 进而写出一个差分方程. 这正是差分方程在应用中的出人意料之处(在第十二节, 我们会从近似计算的问题中看到这种例子). 再下一步, 只剩下如何利用这把钥匙——差分方程与它的解的关系, 去寻找问题的答案了.

习 题 九

1. 试用差分方程的方法推导凸 n 边形($n\geqslant3$)对角线条数公式.

2. 球面上 n 个大圆最多将球面划分成多少个部分?

3. 在一梯形中作两条对角线, 并连结它们的中点, 所得的线段与下底再构成一个梯形. 如此重复 1975 次, 最后得到的梯形上底边长恰好与原来的梯形上底边长相等. 若原梯形高为 h, 上底边长为 a, 求原梯形的面积.

*4. (第 27 届国际中学生数学竞赛题) 设 P_0 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 外一定点. 我们构造一个点列 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, 其中点 P_{k+1} 是点 P_k 围绕点

A_{k+1} 顺时针旋转 $120°$ 所得($k=0,1,2,\cdots$)，而点 A_s 即点 $A_{s-3}(s\geqslant 4)$。证明，若点 P_{1986} 与 P_0 重合，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 是正三角形.

5. 证明：对任意自然数 n，$\dfrac{(1+\sqrt{3})^n-(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$ 是整数，而且能被 2^n 整除.

6. 求证：$(5+\sqrt{26})^n$ 的小数部分前 n 位数字相同.

7. 设 n, k 是正整数，$r=k+\dfrac{1}{2}+\sqrt{k^2+\dfrac{1}{4}}$. 求证：$[r^n]$ 能被 k 整除.

8. 已知 $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_n=-a_{n-1}-2a_{n-2}(n\geqslant 3)$.
求证：$2^{n+1}-7a_{n-1}^2$ 是完全平方数.

9. 设 a 是自然数，$r=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$. 试证：对每个正整数 n，存在正整数 a_n，使 $r^{2n}+r^{-2n}=4a_n+2$ 及 $r^n=\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}$.

10. 求证：$\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}5^k$ 能被 2^{n-1} 整除.

11. 设数列 $\{T_n\}$ 满足 $T_1=2$, $T_{n+1}=T_n^2-T_n+1(n\geqslant 1)$.
(1) 求证：对任意正整数 m, n，若 $m\neq n$，则 T_m 与 T_n 互质；
(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{T_n}$.

12. (第 18 届加拿大中学生数学竞赛题) 设 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 是一个满足递推关系 $u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n$ 的整数序列. 假定 $u_1=39$, $u_2=45$. 证明，1986 整除这个序列中的无穷多项.

13. 将有限连分数
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}\quad \Bigg\}\, n \text{ 条分数线}$$
表示成 n 的函数形式.

14. 如果例 6 定义的有限连分数为
$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots+\cfrac{1}{2}}}\quad \Bigg\}\, 2n \text{ 条分数线}$$
结果又会如何?

15. 试推广命题7.2，并证明之。

16. 设$x+y+z=0$，$xy+yz+zx=\alpha$，$xyz=\beta$. 利用牛顿公式，将$x^n+y^n+z^n(n=2, 3, \cdots, 7)$表为$\alpha$，$\beta$的多项式.

17. n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k=0(k=1, 2, \cdots, n)$. 求证：$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

18. 设$f(x)$是n次整系数多项式，首项系数为1. $f(x)$的根为$x_1, x_2, \cdots, x_n$. 求证：对任意正整数k，$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$为整数。

19. 解方程组

$$\begin{cases} xyz=-24(x+y+z), \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=29. \end{cases}$$

20. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为n个数，每个都等于0，1，2中之一。

$$f_m=\sum_{i=1}^{n} x_i^m.$$

试用f_1和f_2表示f_m.

21. 将$x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+y^n$表示成$xy$与$x+y$的多项式。

22. 已知$a_1, a_2, \cdots, a_n$为等比数列. $a_1+a_2+\cdots+a_n=S$,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=T,$$

将$a_1a_2\cdots a_n$用S和T来表示.

23. 将$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$用$x+y+z$，$xy+yz+zx$和$xyz$表示。

24. 设$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$，证明$\frac{\theta}{\pi}$不是有理数。

25. 设n为正整数，证明$(3+2i)^n$不是实数。

***26.** 设$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，且$\frac{\alpha}{\pi}$是有理数，证明$\operatorname{tg}\alpha$是无理数。

十一、差分方程与幂级数

设 a_0, a_1, a_2, …是一个数列，我们可以作下面这样一个形式和(也就是不考虑字母 x 实际意义的和)：

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{11.1}$$

称它为一个形式幂级数，简称幂级数．学过级数知识的读者会知道，这种级数常常用来表示一个函数．例如

$$1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

可以看作无穷等比数列的和，当 $|x|<1$ 时，它等于 $\frac{1}{1-x}$．我们下面要讨论的是某些形式幂级数与差分方程的关系．为此，有必要先了解下述基本事实：

1．任何一个 x 的多项式都可以看作一个形式幂级数，只是它的系数除了有限多个以外都为零；

2．设 $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 是两个形式幂级数，定义它们的和为

$$P(x)+Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n; \tag{11.2}$$

它们的积为

$$P(x)\cdot Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \tag{11.3}$$

其中，

$$c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}. \tag{11.4}$$

不难看出，当 $P(x)$、$Q(x)$ 为多项式时，这里定义的运算与多项式的运算是一致的. 形式幂级数的加法和乘法显然满足交换律、结合律、分配律.

3. 若 $P(x)\cdot Q(x)=R(x)$，且 $P(x)\neq 0$，则 $Q(x)$ 被 $P(x)$ 和 $R(x)$ 唯一确定. 这是因为，如果 $P(x)\cdot Q_1(x)=R(x)$，则

$$P(x)\cdot(Q(x)-Q_1(x))=R(x)-R(x)=0,$$

由 $P(x)\neq 0$ 可得 $Q(x)-Q_1(x)=0$，即 $Q_1(x)=Q(x)$. 这样，我们可以把 $Q(x)$ 称作 $R(x)$ 和 $P(x)$ 的商，记作

$$Q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}.$$

若 $P(x)$ 的常数项不为零，则对任何 $R(x)$，$\frac{R(x)}{P(x)}$ 存在.

这是因为，若 $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (a_0\neq 0)$，$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，我们只要找到 $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，使得(11.4)成立就行了. 而(11.4)又可以改写为

$$b_n=\frac{1}{a_0}\left(c_n-\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n-j}\right), \tag{11.5}$$

再用归纳法就可以决定 $b_0, b_1, \cdots$ 了.

特别地，若给定两个多项式

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m,\\ g(x)&=1+d_1x+\cdots+d_kx^k,\end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

则存在一个形式幂级数 $P(x)$，使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{11.7}$$

要得到这个 $P(x)$，只需要讨论如何确定 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 就行了. 为简单起见，不妨假设 $m<k$ $\left(\text{即 }\frac{f(x)}{g(x)}\text{ 是真分式}\right)$，因为

对于 $m\geqslant k$ 的情况，我们总可以将 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 写成一个多项式与一个真分式之和的形式. 根据(11.4)，有

$$\left.\begin{aligned}&a_0=c_0,\\&a_1+d_1a_0=c_1,\\&a_2+d_1a_1+d_2a_0=c_2,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_m+d_1a_{m-1}+\cdots+d_ma_0=c_m,\\&a_{m+1}+d_1a_m+\cdots+d_{m+1}a_0=0,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_k+d_1a_{k-1}+\cdots+d_ka_0=0,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{k+l}+d_1a_{k+l-1}+\cdots+d_ka_l=0,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{11.8}$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 满足 k 阶常系数线性齐次差分方程

$$a_n+d_1a_{n-1}+d_2a_{n-2}+\cdots+d_ka_{n-k}=0,\tag{11.9}$$

这里 $d_k\neq0$，并由下列各式逐步地给定初始条件:

$$\left.\begin{aligned}&a_0=c_0,\\&a_1=c_1-d_1a_0,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_m=c_m-d_ma_0-\cdots-d_1a_{m-1},\end{aligned}\right\}\tag{11.10}$$

及 $$a_l=-\sum_{i=0}^{l-1}d_{l-i}a_i\quad(m<l<k).$$

我们注意，(11.9)的特征多项式为

$$x^k+d_1x^{k-1}+d_2x^{k-2}+\cdots+d_k,\tag{11.11}$$

它正好等于 $x^kg\left(\frac{1}{x}\right)$.

反过来，若给定一个形如(11.9)的差分方程及相应的初

始条件，那么由(11.8)可以确定 $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$(当 $m<l<k$ 时，$c_l=0$)，于是按(11.6)写出的多项式 $f(x)$、$g(x)$一定满足(11.7)．这就使我们看到，常系数线性齐次差分方程与真分式(分母常数项不为零)所对应的形式幂级数(11.7)等价．我们把(11.7)中的 $P(x)$ 叫做 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的幂级数展开式*.

【例 1】 求 $\dfrac{3x}{1+x+x^2}$ 的幂级数展开式.

解 设

$$\frac{3x}{1+x+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

按照(11.10)，有 $a_0=0$，$a_1=3$．再由(11.9)，有

$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=0.$$

于是，令

$$a_n=c_1\sin\frac{2n\pi}{3}+c_2\cos\frac{2n\pi}{3},$$

$$\begin{cases} c_2=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}c_1-\dfrac{1}{2}c_2=3, \end{cases}$$

有 $c_1=2\sqrt{3}$，$c_2=0$．所以，$a_n=2\sqrt{3}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$.

这样，$$\frac{3x}{1+x+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}2\sqrt{3}\,x^n\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

【例 2】 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n x^n$ 写成真分式形式．$\{F_n\}$为斐波那契数列.

---

* 当字母 x 有确定的涵义时，对(11.7)通常需要讨论成立的条件，也就是收敛域问题．例如当 x 是实变量时，就需要写出收敛区间(或写出收敛半径)．这可以参看数学分析和复变函数论教材的有关部分.

解　设

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{f(x)}{g(x)},$$

由于 F_n 满足的差分方程(1.1)，特征多项式为

$$x^2 - x - 1,$$

所以，有 $x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - x - 1$. 因此，$g(x) = 1 - x - x^2$.

设 $f(x) = c_0 + c_1 x$，则

$$c_0 = F_0 = 0,$$

$$c_1 = F_1 + F_0 = 1,$$

即 $f(x) = x$. 于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x_n = \frac{x}{1 - x - x^2}$.

从以上例题中我们可以看到，由于(11.9)的特征多项式为 $x^k g\left(\frac{1}{x}\right)$，(11.9)的通解应该与分母为 $g(x)$ 的真分式之间有着内在的联系. 如果(11.9)的特征根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，且 α_i 为 k_i 重根($i = 1, 2, \cdots, r$)，则(11.11)还可以改写成

$$(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_r)^{k_r}$$

我们有:

命题 11.1　设 $\{a_n\}$ 是满足差分方程(11.9)的数列. 则形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{b_{ij}}{(1 - \alpha_i x)^{j+1}}, \qquad (11.12)$$

其中 α_i 是多项式(11.11)的 k_i 重根，b_{ij} 为常数$\left(i = 1, 2, \cdots, r; j = 0, 1, \cdots, k_i - 1; \sum_{i=1}^{r} k_i = k\right)$.

证明　首先我们证明，对任意参数 α 及非负整数 k，有

$$\frac{1}{(1 - \alpha x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{n} \alpha^n x^n, \qquad (11.13)$$

这可以用数学归纳法来完成。

当 $k=0$ 时，$\frac{1}{1-\alpha x}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^n\alpha^n x^n$。

假设 $\frac{1}{(1-\alpha x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^n\alpha^n x^n$，则对于 $k+1$，由于

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha x)\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k}^n\alpha^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k}^n\alpha^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k}^n\alpha^{n+1}x^{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k}^n\alpha^n x^n-\sum_{n=1}^{\infty}C_{n+k-1}^{n-1}\alpha^n x^n\\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n+k}^n-C_{n+k-1}^{n-1})\alpha^n x^n\\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}C_{n+k-1}^n\alpha^n x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^n\alpha^n x^n=\frac{1}{(1-\alpha x)^k},
\end{aligned}
$$

所以，$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k}^n\alpha^n x^n=\frac{1}{(1-\alpha x)^{k+1}}$ 对 $k\geqslant 0$ 成立。

其次，任何一个 p 次多项式 $h(x)$ 一定可以表示为

$$h(x)=b_0+\sum_{k=1}^{p}b_k\frac{(x+k)\cdot\cdots\cdot(x+1)}{k!},$$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_p$ 为常数．这是因为 $\frac{(x+k)\cdot\cdots\cdot(x+1)}{k!}$ 是一个 k 次多项式．这样，我们有

$$h(n)=\sum_{k=0}^{p}C_{n+k}^n b_k.$$

于是，根据第三节的通解公式(3.12)，方程(11.9)的通解也可以写成

$$a_n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}b_{ij}C_{n+j}^j\alpha_i^n, \tag{11.14}$$

所以，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1} b_{ij}C_{n+j}^{j}\alpha_i^n\right)x^n$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1} b_{ij}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+j}^{j}\alpha_i^n x^n\right)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\frac{b_{ij}}{(1-\alpha_i x)^{j+1}}.$$

按照命题 11.1, $\{a_n\}$与(11.7)的部分分式*相互唯一确定. 再注意到

$$g(x)=(1-\alpha_1 x)^{k_1}\cdot\cdots\cdot(1-\alpha_r x)^{k_r},$$

还会给我们带来某些便利. 例如,根据例 2,有

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right),$$

便得到了 $\frac{x}{1-x-x^2}$ 的部分分式分解.

【例 9】 设$\{a_n\}$是满足 $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}=0$ $(n\geqslant 3)$ 及 $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=4$ 的数列.

(1) 将 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 写成真分式形式,并进行部分分式分解;

(2) 写出$\{a_n\}$的通项公式.

---

* (11.12)右端的每一个分式都称作一个"部分分式". 把一个真分式分解成部分分式的和,叫作"部分分式分解". 命题 11.1 实际上证明了部分分式分解的存在性并给出了分解的方法. 关于部分分式分解的通常方法,有兴趣的读者可以参看普通微积分教材中的不定积分部分.

解 根据(11.8)，有

$$c_0=1,\quad c_1=2-1=1,\quad c_2=4-1-2=1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^2+x^3}=\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)}.$$

设 $\dfrac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)}=\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{(1-x)^2}+\dfrac{C}{1+x}$，则有

$$A(1-x^2)+B(1+x)+C(1-x)^2=1+x+x^2.$$

比较两边各项系数，不难解得 $A=-\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{3}{2}$, $C=\dfrac{1}{4}$. 所以，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\frac{-\frac{3}{4}}{1-x}+\frac{\frac{3}{2}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}. \qquad (11.15)$$

(2) 根据(11.14)和(11.15)，有

$$\begin{aligned} a_n&=-\frac{3}{4}C_n^0+\frac{3}{2}C_{n+1}^1+\frac{1}{4}C_n^0(-1)^n\\ &=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}n+\frac{1}{4}(-1)^n. \end{aligned}$$

【例 4】 设 a_n 满足方程(11.9)，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

如果 $b_0=a_0$, $b_n=a_n-a_{n-1}(n>0)$，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=\frac{(1-x)f(x)}{g(x)}.$$

证明

$$\begin{aligned} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n&=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\\ &=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

因此，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{(1-x)f(x)}{g(x)}$.

你能从例 4 推测出更一般的结论吗？

从例 3 中，我们看到了差分方程(11.9)、它的解(11.14)及真分式的幂级数展开式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 三者之间的关系. 我们从以上讨论中可以作出如下的总结：

I. 有三个相互等价的"范畴"，它们是：

i) 常系数线性齐次差分方程(11.9)；

ii) 形如(11.14)(或(3.12))的整变量函数；

iii) 分母为 $g(x)$的真分式，其中 $g(x)$由(11.6)给出.

II. 对于以上三种描述，特征多项式相应地为：

i) $x^k + d_1 x^{k-1} + \cdots + d_k$；

ii) $\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{k_i}$；

iii) $x^k g\left(\frac{1}{x}\right)$.

III. 对应于上述的三种描述，所需的一般附加条件是：

i) 初始条件，即给出 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 的值；

ii) 常数 b_{ij}(在(3.12)中给出常数 c_{ij})；它也可以由 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的部分分式分解(11.12)中得到；

iii) 次数小于 k 的多项式 $f(x)$，它的系数与初始条件的关系由(11.8)或(11.10)给出.

下面我们来看几个应用形式幂级数方法的例子.

【例 5】 求证

$$\sum_{m=k}^{n-l} C_m^k C_{n-m}^l = C_{n+1}^{k+l+1} \qquad (k+l \leqslant n). \qquad (11.16)$$

证明 由(11.13)，有

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_{i+k+l+1}^{i} x^{i} = \frac{1}{(1-x)^{k+l+2}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{l+1}}$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_{i+k}^{i} x^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_{j+l}^{j} x^{j}\right).$$

再由幂级数乘积的定义式(11.3)和(11.4),展开上述两个相乘的幂级数,并比较两边 x^{n-k-l} 的系数,便得到

$$\sum_{i=0}^{n-k-l} C_{i+k}^{i} \cdot C_{n-k-i}^{n-k-l-i} = C_{n+1}^{n-k-l} = C_{n+1}^{k+l+1}.$$

我们令 $m=i+k$,即得(11.16).

下面,给定 $l+1$ 个正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_l, n$, 我们来研究一次不定方程

$$m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_lx_l=n \qquad (11.17)$$

的非负整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_l)$的组数 $T(n)$.

首先我们说, $T(n)$应等于 $\frac{1}{(1-x^{m_1})(1-x^{m_2})\cdots(1-x^{m_l})}$ 的形式幂级数中 x^n 的系数. 这是因为

$$\frac{1}{(1-x^{m_1})\cdot\cdots\cdot(1-x^{m_l})} = (1+x^{m_1}+x^{2m_1}+\cdots)\cdot\cdots$$
$$\cdot(1+x^{m_l}+x^{2m_l}+\cdots), \qquad (11.18)$$

右端展开后,是所有形如 $x^{x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_lm_l}$($x_1, x_2, \cdots, x_l$ 是非负整数)的单项式之和. 所以 x^n 的系数就等于所有满足

$$x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_lm_l=n$$

的单项式的个数,也就是(11.17)解的组数.

由上所述,只需利用差分方程的方法求出(11.18)右端 x^n 系数的表达式,也就是 $T(n)$的计算公式了.

【例 6】 求不定方程 $2x+3y+5z=n$ ($n>0$)的非负整数解的组数.

解

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}$$

$$=\frac{1}{\left\{\begin{array}{l}(1-x)^3(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)(1-\varepsilon x)\\(1-\varepsilon^2 x)(1-\varepsilon^3 x)(1-\varepsilon^4 x)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\frac{77}{360}}{1-x}+\frac{\frac{7}{60}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{1}{30}}{(1-x)^3}+\frac{\frac{1}{8}}{1+x}+\frac{-\frac{\omega^2}{9}}{1-\omega x}$$

$$+\frac{-\frac{\omega}{9}}{1-\omega^2 x}+\frac{1}{25}\left(\frac{2-\varepsilon-\varepsilon^4}{1-\varepsilon x}+\frac{2-\varepsilon^2-\varepsilon^3}{1-\varepsilon^2 x}\right.$$

$$\left.+\frac{2-\varepsilon^2-\varepsilon^3}{1-\varepsilon^3 x}+\frac{2-\varepsilon-\varepsilon^4}{1-\varepsilon^4 x}\right),$$

这里，ω，ε 分别为三次和五次单位根．各分式的幂级数展开式中，x^n 的系数分别为已求出的常数与 1，C_{n+1}^1，C_{n+2}^2，$(-1)^n$，ω^n，ω^{2n}，ε^n，ε^{2n}，ε^{3n}，ε^{4n} 的乘积．因此，

$$T(n)=\frac{77}{360}+\frac{7}{60}C_{n+1}^1+\frac{1}{30}C_{n+2}^2+\frac{1}{8}(-1)^n-\frac{\omega^{n+2}}{9}$$

$$-\frac{\omega^{2n+1}}{9}+\frac{1}{25}[(2-\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^n+(2-\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{2n}$$

$$+(2-\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{3n}+(2-\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{4n}].$$

注意到 $\omega^{n+2}+\omega^{2n+1}=\omega^{n+2}+\omega^{-n-2}=-2\cos\frac{2n+1}{3}\pi$ 及

$$\varepsilon^n+\varepsilon^{4n}=\varepsilon^n+\varepsilon^{-n}=2\cos\frac{2n\pi}{5},$$

$$\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{3n}=2\cos\frac{4n\pi}{5},$$

有

$$T(n)=\frac{131}{360}+\frac{n}{6}+\frac{n^2}{60}+\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{2}{9}\cos\frac{(2n+1)\pi}{3}$$
$$+\frac{4}{25}\Big[\Big(1-\cos\frac{2\pi}{5}\Big)\cos\frac{2n\pi}{5}$$
$$+\Big(1-\cos\frac{4\pi}{5}\Big)\cos\frac{4n\pi}{5}\Big].$$

【例 7】 设正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_l$ 的最大公因数是1.不定方程

$$m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_lx_l=n \quad (n>0)$$

非负整数解的组数为 $T(n)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n^{l-1}}$.

解 多项式 $g(x)=(1-x^{m_1})(1-x^{m_2})\cdot\cdots\cdot(1-x^{m_l})$的任何根都是单位根(即它的某个幂等于1). 而1显然是 $g(x)$的 l 重根. 我们先来证明, 除了1之外, 其他的根重数都小于 l.

设 α 是 $g(x)$的任意一个根. 则存在一个 $j(1\leqslant j\leqslant l)$, 使 α 是 $1-x^{m_j}$ 的根. 但 $1-x^{m_j}$ 只有单根, 所以 α 是 $1-x^{m_j}$ 的单根. 另外, 如果 α 是所有 $1-x^{m_j}(1\leqslant j\leqslant l)$ 的根, 由于 $m_1, m_2, \cdots, m_l$ 的最大公因数是 1,根据初等数论可知, 存在一组整数 $r_1, r_2, \cdots, r_l$, 使

$$r_1m_1+r_2m_2+\cdots+r_lm_l=1.$$

于是, $\alpha=\alpha^{r_1m_1+\cdots+r_lm_l}=(\alpha^{m_1})^{r_1}\cdot\cdots\cdot(\alpha^{m_l})^{r_l}=1$. 可见非1的根 α 不会是所有 $1-x^{m_j}$ 的根. 因此, $g(x)$非1的根重数小于 l.

在 $\frac{1}{g(x)}$ 的幂级数展开式 x^n 项的系数中,不妨设 $\alpha_1=1$, 则 $k_1=l$. 而 $k_2, k_3, \cdots$ 都小于 l. 我们来计算常数 $b_{1(l-1)}$.

将 $\frac{1}{g(x)}$的分解式 $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=0}^{k_i-1}\frac{b_{ij}}{(1-\alpha_ix)^{j+1}}$ 乘以$(1-x)^l$, 则除

了 $b_{1(l-1)}$ 外，其余每个分式的分母中都不再含有因式 $1-x$，而分子中有因式 $1-x$. 此时将 $x=1$ 代入，就会消去其余各个部分，而只留下常数 $b_{1(l-1)}$. 所以，

$$b_{1(l-1)}=(1-x)^l\frac{1}{g(x)}\bigg|_{x=1}$$
$$=\frac{1}{(1+x+\cdots+x^{m_1-1})\cdot\cdots\cdot(1+x+\cdots+x^{m_l-1})}\bigg|_{x=1}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2\cdot\cdots\cdot m_l}.$$

按(11.14)，$T(n)=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=0}^{k_i-1}b_{ij}C_{n+j}^{j}\alpha_i^n$. 由于对 $2\leqslant i\leqslant r$，有 $k_i<l$，因此 C_{n+j}^{j} 是次数小于 $l-1$ 的 n 的多项式. 注意到 α_i 是单位根，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=2}^{r}\sum\limits_{j=0}^{k_i-1}b_{ij}C_{n+j}^{j}\alpha_i^n}{n^{l-1}}=\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}b_{ij}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+j}^{j}\alpha_i^n}{n^{l-1}}\right)=0,$$

同时还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{l-2}b_{1j}C_{n+j}^{j}}{n^{l-1}}=\sum_{j=0}^{l-2}b_{1j}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+j}^{j}}{n^{l-1}}\right)=0.$$

这样，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n^{l-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{1(l-1)}C_{n+l-1}^{l-1}}{n^{l-1}}$$
$$=b_{1(l-1)}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+l-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}{n^{l-1}(l-1)!}$$
$$=\frac{1}{m_1\cdot\cdots\cdot m_l\cdot(l-1)!}.$$

【例 8】（美国大学生数学竞赛题） 设幂级数

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \tag{11.19}$$

的系数 a_k 只取 0 或 1. 证明下面两个结论中较容易的一个：

(a) 若 $P(0.5)$是有理数*，则 $P(x)$是有理函数的幂级数展开式；

(b) 若 $P(0.5)$不是有理数，则 $P(x)$不是有理函数的幂级数展开式.

粗心的人可能会认为(b)是较容易证的一个：若

$$P(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

是有理函数，代入一个有理数 0.5 得到的 $P(0.5)$，当然应当是有理数了. 不对！因为 $f(x)$、$g(x)$的系数并不见得是有理数. 其实还是(a)较容易证些. 我们先来证明(a).

我们注意，如果采用二进制数表示，则 0.5^k 表示为 $\underbrace{0.0\cdots0}_{k-1\text{个零}}1$($k$ 是正整数). 因此，$f(0.5)$应记作

$$a_0.a_1a_2\cdots. \tag{11.20}$$

$f(0.5)$是有理数当且仅当(11.20)除了有限个 a_k 外是循环的. 也就是说，存在自然数 m、l，使得

$$a_n=a_{n-l}. \quad (n\geqslant m)$$

这是一个 l 阶常系数线性齐次差分方程. 由前所述，$P(x)$一定可以表示成两个多项式的商，即一个有理函数.

命题(b)也是对的. 我们用反证法来证明.

设 $P(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x)$、$g(x)$由(11.6)给出，则 $\{a_n\}$除去前有限项外，满足差分方程(11.9). 不妨设(11.9)当 $n\geqslant s$ 时成立. 考虑所有的有序数组(a_{n-k}, a_{n-k+1}, $\cdots$, a_{n-1})，这样的数组至多有 2^k 个，因为其中每个数只能取 0 或 1. 根据"抽屉原则"，一定存在 l, l'($l>l'>s$)，使得(a_{l-k}, $\cdots$,

* $P(0.5)$指的是级数 $a_0+a_1\cdot0.5+a_2\cdot0.5^2+\cdots$ 的和. 由数学分析可知，这个级数总是收敛的.

a_{l-1})与($a_{l'-k}$, $\cdots$, $a_{l'-1}$)相同，即

$$a_{l-k}=a_{l'-k},\ \cdots,\ a_{l-1}=a_{l'-1}.$$

由方程(11.9)，便可以得到 $a_l=a_{l'}$, $a_{l+1}=a_{l'+1}$, $\cdots$ 总之，有

$$a_{n+l-l'}=a_n. \qquad (n\geqslant l)$$

这说明$\{a_n\}$除有限项外是循环的，于是 $P(0.5)$是有理数. 因而(b)也得证.

习　题　十

1. 若在(11.6)中 $m\geqslant k$, (11.8)将会有什么变化?由此应得出什么结论?

2. 将下列形式幂级数表示成有理式:

(1) $x+4x^2+\cdots+n^2x^n+\cdots$;

(2) $1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\cdots+x^n\cos n\theta+\cdots$.

3. 将下列有理式分解成部分分式:

(1) $\dfrac{x-5}{x^2-3x-2}$;

(2) $\dfrac{1}{1-x^k}$. (k 为正整数)

4. 根据以下常系数线性齐次差分方程及初始条件，作出对应的有理式:

(1) $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0$,　　$a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=1$;

(2) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-k}$,　　$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=1$.

5. 设 $P(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $b_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\dfrac{P(x)}{1-x}$.

6. 设 $\dfrac{1}{(1-\alpha_1x)^{k_1+1}\cdot\cdots\cdot(1-\alpha_rx)^{k_r+1}}$ $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r\neq 0)$分解式为

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i}\frac{b_{ij}}{(1-\alpha_ix)^{j+1}},$$

求所有的常数 b_{ik_i} $(1\leqslant i\leqslant r)$.

7. 用函数 $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{1-x_kx}$ 的幂级数展开式证明牛顿公式(见第十节).

（提示：先证明 $\varphi(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)}$，其中

$$f(x)=(1-x_1x)\cdot\cdots\cdot(1-x_nx),$$

$f'(x)$为$f(x)$的一阶导数.）

*8. 设 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 为实数，

$$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k \quad (1\leqslant k\leqslant m).$$

$$f(n)=z_1^n+z_2^n+\cdots+z_m^n$$

是定义在非负整数集上的函数. 如果$f(n)$的值域只有有限多个数，试证 $\frac{\theta_k}{\pi}$ 是有理数 $(1\leqslant k\leqslant m)$.

（提示：参看例 8 的证明.）

9. (1) 将形式幂级数的定义推广到多个变量的情形；

(2) 设$P(x)$为幂级数，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式. 证明$P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_n)$和$P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_n)$都可以表示成$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的形式幂级数.（提示：参看第十节例 8 之后关于对称多项式的说明.）

*(3) 设 f 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的所有 mn 次单项式的和，

$$f=g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n),$$

其中 g 为整系数多项式. 证明，在$g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$中，$\sigma_n^m$ 的系数为 $(-1)^{(n-1)m}$. 特别地，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的所有 n 次单项式的和等于 $(-1)^{n-1}\sigma_n$ 加上一个 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 的多项式.

十二、差分方程与近似计算

如果你的朋友问你，"$\sqrt{5}$ 的小数点后第二十位上数字是几？"你有办法很快地算出来吗？现在让我们用差分方程来解决这样的问题，并看看差分方程作为一个工具，在计算数学中的地位.

我们知道，近年来由于计算机的广泛使用，改变了社会生活的各个方面，诸如生产、科研、教育、管理等等，其影响波及到数学本身的研究．这在"计算方法"方面尤为明显．古典的方法，对计算问题一般是以得到一个公式为满足的．如解代数方程，求距离、面积、体积、角的大小，计算古典概率等等．事实上，有许多问题是不能用一个公式就解决得了的．在现代，人们常采用这样的方法：首先把一个计算问题归结为一个算法问题，然后相应地写出算法语言，如果计算机能"通过"(即算出合理的结果)，问题就算解决了．由于计算机的运算速度快，计算准确、可靠，精度较高，所以人们正致力于把更多的计算问题纳入"实际问题——数学模型——算法问题——计算程序——上机运行"这样的轨道.

从计算数学的角度来看，差分方程本身就是"迭代"的形式．例如方程 $x_{n+1}=f(x_n)$，就可以看作用已求出的 x_n，代入函数关系式 $y=f(x)$中，以求得新的结果 x_{n+1}．"迭代"是计算方法中一种十分普遍的做法．可想而知差分方程在计算数学中所具有的重要性了.

在前面的第七节中，有一个例题，就用差分方程为一个近

似计算问题提供了预备条件，这就是例 4. 那个例题及所得出的命题 7.1，说明斐波那契数列 $\{F_n\}$ 相邻项之比，趋向于无理数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这不就是说，$\left\{\frac{2F_{n+1}}{F_n}+1\right\}$ 可以看作一个收敛于 $\sqrt{5}$ 的数列了吗？事实上，我们写出这个数列的前 10 项，为

$$3,\ 2,\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{5},\ \frac{9}{4},\ \frac{29}{13},\ \frac{47}{21},\ \frac{76}{34},\ \frac{123}{55},\ \frac{199}{89}, \tag{12.1}$$

近似地可以写成

3, 2, 2.7, 2.2, 2.25, 2.231, 2.238, 2.2353, 2.2364, 2.23596，它们的确是摆动地趋近 $\sqrt{5}$. 这样，我们便有了一个求 $\sqrt{5}$ 近似值的方法了.

一般地，要求 $\sqrt{k}$（k 是非平方数的正整数），是否也可以用类似的方法呢？要解答这个问题，不仅要找到一个计算过程，还需回答计算量有多大、误差如何等问题.

为了在下面能引入解决这一问题的"贝努利方法"，先给出以下定理.

定理 5 设实系数多项式

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m \qquad (a_m\neq 0)$$

的根为 α_1, α_2, $\cdots$, α_s（允许有重根），且 $|\alpha_1|>|\alpha_k|$, $k=2, 3, \cdots, s$. 适当选择初始条件，则差分方程

$$x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_mx_{n-m}=0 \tag{12.2}$$

的解满足 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\alpha_1.$$

定理中所谓"适当选择初始条件"，实际上几乎可以不受什么限制. 例如选择

$$x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=0,\ x_m=1 \tag{12.3}$$

等等.

另外，如果在定理的条件下添加 $|\alpha_2|>|\alpha_i|$, $i=3, 4, \cdots, s$, 且 α_1 是单根, 则在适当的初始条件下还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+2}-x_{n+1}^2}{x_{n-1}x_{n+1}-x_n^2}=\alpha_1\alpha_2. \tag{12.4}$$

定理 5 的证明如下:

证明 由定理 3 可知, 存在多项式 $g_1, g_2, \cdots, g_s$, 使方程 (12.2) 的解为

$$x_n=g_1(n)\alpha_1^n+g_2(n)\alpha_2^n+\cdots+g_s(n)\alpha_s^n, \tag{12.5}$$

其中 g_1、g_2、…、g_s 当然应与初始条件有关. 我们任取一个使 g_1 不恒等于零的初始条件*, 并设

$$g_1(n)=c_0n^t+c_1n^{t-1}+\cdots+c_t, \ (c_0\neq 0)$$

则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{g_1(n+1)\alpha_1^{n+1}+g_2(n+1)\alpha_2^{n+1}+\cdots+g_s(n+1)\alpha_s^{n+1}}{g_1(n)\alpha_1^n+g_2(n)\alpha_2^n+\cdots+g_s(n)\alpha_s^n}$$

$$=\frac{\alpha_1 g_1(n+1)}{g_1(n)}\cdot\frac{\left\{1+\frac{g_2(n+1)}{g_1(n+1)}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n+1}+\cdots+\frac{g_s(n+1)}{g_1(n+1)}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)^{n+1}\right\}}{\left\{1+\frac{g_2(n)}{g_1(n)}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n}+\cdots+\frac{g_s(n)}{g_1(n)}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)^{n}\right\}}$$

---

* 这种初始条件的选取很容易实现. 例如按(12.3), 则 g_1 一定不是零多项式. 否则若 $g_1=0$, 则(12.5)便成为

$$x_n=g_2(n)\alpha_2^n+\cdots+g_s(n)\alpha_s^n. \tag{12.6}$$

作为 $f(x)$ 的根, $\alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的重数之和不大于 $m-1$, 因此(12.6)满足一个不大于 $m-1$ 阶的常系数线性齐次差分方程. 但(12.3)中, $x_1=\cdots=x_{m-1}=0$, 将它作为这个差分方程的初始条件, 应有 $x_n=0$ $(n=m, m+1, \cdots)$, 这与 $x_m=1$ 矛盾.

因为$\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right|<1(k=2, 3, \cdots, s)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_k(n+1)}{g_1(n+1)}\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{g_k(n)}{g_1(n)}\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)^n=0,^*$$

而

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)}=\frac{c_0(n+1)^t+c_1(n+1)^{t-1}+\cdots+c_t}{c_0n^t+c_1n^{t-1}+\cdots+c_t}$$

$$=\frac{c_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^t+c_1\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t-1}+\cdots+c_t\frac{1}{n^t}}{c_0+c_1\frac{1}{n}+\cdots+c_t\frac{1}{n^t}}$$

$$\to 1\quad(n\to\infty),$$

这样便有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\alpha_1\lim_{n\to\infty}\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{g_2(n+1)}{g_1(n+1)}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n+1}+\cdots+\frac{g_s(n+1)}{g_1(n+1)}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)^{n+1}}{1+\frac{g_2(n)}{g_1(n)}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n+\cdots+\frac{g_s(n)}{g_1(n)}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)^n}$$

$$=\alpha_1.$$

现在，我们回到前面那个问题.

要求出$\sqrt{k}$，我们可以按照以下步骤去做：

(1) 取定一个正整数$[\sqrt{k}]$或$[\sqrt{k}]+1$，并将它记作a；

(2) 将互为共轭的两根式$a+\sqrt{k}$和$a-\sqrt{k}$看作一元二次方程的两根，则这个方程为

$$x^2-2ax+a^2-k=0;$$

(3) 以多项式$x^2-2ax+a^2-k$为特征多项式，作出差分方程

* 参见数学分析教材等。

$$x_{n+1}=2ax_n+(k-a^2)x_{n-1};$$

(4) 由于 $|a+\sqrt{k}|>|a-\sqrt{k}|$，根据定理 5，有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\to a+\sqrt{k}, \quad (n\to\infty)$$

因此可以用序列 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}-a\right\}$ 逼近 $\sqrt{k}$。

这就是求 $\sqrt{k}$ 近似值的贝努利方法.

仍以求 $\sqrt{5}$ 近似值为例. 取 $a=[\sqrt{5}]=2$，作一元二次方程

$$x^2-4x-1=0.$$

再相应地写出差分方程

$$x_{n+1}=4x_n+x_{n-1}, \tag{12.7}$$

并取 $x_1=0$, $x_2=1$. 则 $\{x_n\}$ 前七项为

0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292.

$$\frac{x_3}{x_2}-2=2,\quad \frac{x_4}{x_3}-2=2.25,\quad \frac{x_5}{x_4}-2=\frac{38}{17}\approx 2.2353,$$

$$\frac{x_6}{x_5}-2=\frac{161}{72}\approx 2.23611,\quad \frac{x_7}{x_6}-2=\frac{682}{305}\approx 2.236066.$$

而 $\sqrt{5}$ 的七位近似值为 2.236068，可见以上计算过程中，有效数字的位数不少于计算次数，它显然比用前面的(12.1)逼近 $\sqrt{5}$ 更有效，更精确. 这是什么道理？

我们回头来考察一下定理 5 的证明. 当 α_1, α_2 是两个单根时，g_1 与 g_2 是两个常数. $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 趋近于 α_1 的速度，基本上与 $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n$ 趋近于零的速度一致. 而将 $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n$ 作为零的近似值，其精确位数大约是 $\left[n\lg\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|\right]$. 这就是说，要使计算结果准确，除了要使 n 较大（这就意味着增大运算次数），还要使 $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|$

尽可能大些. 这就是我们为什么要在步骤(1)中, 取 a 为 $[\sqrt{k}]$ 或 $[\sqrt{k}]+1$ 的缘故.

这时候, 方程(12.7)在初始条件 $x_1=0,\ x_2=1$ 下, 解为

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}[(2+\sqrt{5})^{n-1}-(2-\sqrt{5})^{n-1}],$$

因此,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^{n-1}-(2-\sqrt{5})^{n-1}}$$

$$=(2+\sqrt{5})\cdot\frac{1-(4\sqrt{5}-9)^n}{1-(4\sqrt{5}-9)^{n-1}}.$$

于是, 当 $n>1$ 时, 有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-(2+\sqrt{5})\right|=(2+\sqrt{5})\cdot\frac{10-4\sqrt{5}}{1-(4\sqrt{5}-9)^{n-1}}$$

$$\cdot(9-4\sqrt{5})^{n-1}<5\times(9-4\sqrt{5})^{n-1}<5\times0.06^{n-1}.$$

这就说明, 每多计算一次 x_n 的值, 误差就会减小到前一次的十几分之一. 学过数论的读者也许会发现, 这一次我们求出的 $\sqrt{5}$ 的一列近似分数值, 恰是 $\sqrt{5}$ 的"最佳逼近"分数.

以上求 $\sqrt{k}$ 近似值的方法, 实际上为我们提供了一个用四则运算近似替代开平方运算的方法.

如果我们希望减少计算次数, 使逼近的速度比贝努利方法更快, 还可以采用牛顿法(切线法). 它与贝努利方法的主要区别在于差分方程的不同. 牛顿法的理论根据涉及一些数学分析知识. 这里不打算详细引入整套理论, 只对方法本身作些介绍.

用牛顿法解方程 $f(x)=0$, 也要先作出一个差分方程, 再逐次迭代计算, 直到求得满足精度要求的近似根为止. 例如,

当 $f(x)$ 为多项式

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m$$

时，先作出 $f(x)$ 的一阶导数*

$$f'(x)=mx^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+\cdots$$
$$+a_k(m-k)x^{m-k-1}+\cdots+a_{m-1},$$

然后，对差分方程

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{12.8}$$

适当选取初始值 x_0，则 x_n 会随 n 的增大，趋近于 $f(x)$ 的一个根 α，而且接近 α 的速度非常快．方程(12.8)是求 $f(x)$ 近似根的一个十分有效的途径．仍以求 $\sqrt{5}$ 近似值为例：

$\sqrt{5}$ 是 $x^2-5=0$ 的一个根，我们取 $f(x)=x^2-5$，则 $f'(x)=2x$．根据(12.8)，可写出

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-5}{2x_n}=\frac{x_n^2+5}{2x_n}. \tag{12.9}$$

取 $x_0=2$，有 $x_1=\frac{9}{4}=2.25$，$x_2=\frac{161}{72}\approx2.23611$，

$$x_3=\frac{51841}{23184}\approx2.2360679779,$$

仅以 x_1、x_2、x_3 作为 $\sqrt{5}$ 的近似值，便分别具有两位、五位和十位有效数字了．以后的 x_4 和 x_5 分别精确到二十位和四十位．用差分方程(12.9)为什么会有这么好的效果呢？

我们回头看看第八节的(8.9)．当(8.9)中的 a 取 $a=5$ 时，正是(12.9)．由(8.9)的解(8.10)及 $\alpha=\sqrt{5}$ 可写出

$$x_n=\sqrt{5}\,\frac{(2+\sqrt{5})^{2^n}+(2-\sqrt{5})^{2^n}}{(2+\sqrt{5})^{2^n}-(2-\sqrt{5})^{2^n}}$$

---

* 有关导数的内容参见数学分析教材。

$$=\sqrt{5}\cdot\frac{1+(2-\sqrt{5})^{2^{n+1}}}{1-(2-\sqrt{5})^{2^{n+1}}},$$

因而有

$$|x_n-\sqrt{5}|=\sqrt{5}\left|\frac{2(2-\sqrt{5})^{2^{n+1}}}{1-(2-\sqrt{5})^{2^{n+1}}}\right|$$

$$<\frac{2\sqrt{5}}{1-(2-\sqrt{5})^4}(\sqrt{5}-2)^{2^{n+1}}<5\times 0.06^{2^n}.$$

可见，其精确位数大略是按计算次数 n 的二重指数的形式增大的. 只要与贝努利方法求出的结果作个比较，便会看出，这里求出的 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 正是贝努利方法求出的那一列近似值的子列.

牛顿法的应用不限于求多项式的根. 对一般的初等函数 $f(x)$，都有可能使用牛顿法求出 $f(x)=0$ 的近似根.

有时，为了某个方面的需要，如考虑编写程序的便利等，往往要求尽量少计算多位数除法. 这时，我们也可以采用这样的方法：将 $\{x_n\}$ 中各项的分子、分母各构成一个整数列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$，直到对特定的正整数 m，求出 α_m 和 β_m，再用 $\frac{\alpha_m}{\beta_m}=x_m$ 计算一次除法，得到结果. 例如用差分方程组

$$\begin{cases}\alpha_n=2\alpha_{n-1}^2-1,\\ \beta_n=2\beta_{n-1}\alpha_{n-1},\end{cases}\tag{12.10}$$

就可以在适当选择初始条件的情况下，用整数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 代替 $x_{n+1}=\frac{x_n^2+k}{2x_n}$ 进行"迭代"计算，直至用 $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ 代替 x_m 作为 $\sqrt{k}$ 的近似值(见习题 3 及解答).

以上，我们以求 $\sqrt{k}$ 为例，介绍了差分方程在近似计算中的应用. 实际上，差分方程的应用远不止于此. 在代数方程或超越方程的数值解法、数值积分、函数值的逼近、求方程

组的近似解等方面，差分方程（或方程组）都是不可缺少的工具．所有这些，由于涉及的基础知识较深，专业性又很强，这里就不再详述了．

差分方程与计算方法之间所具有的密切关系，不可能不对差分方程的研究、发展和应用带来巨大的影响．事实上，许多"初等"的差分方程习题，就是来源于对某些计算方法问题的研究．特别像某些性质的讨论（单调性、有界性等）、极限问题（存在性与求法）等等．反过来，对差分方程的研究，也必然会为计算数学的新进展创造条件．

习 题 十 一

1．用贝努利方法求 $\sqrt{3}$ 精确到十位有效数字的近似值．

2．用牛顿法求 $\sqrt[5]{4}$ 精确到八位有效数字的近似值．

3．(1) 已知数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+3}{2x_n}$，$x_0=2$．$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$分别为$\{x_n\}$中各项的分子、分母构成的数列．用数学归纳法证明，对 $n\geqslant1$ 有

$$\begin{cases}\alpha_n=2\alpha_{n-1}^2-1,\\ \beta_n=2\beta_{n-1}\alpha_{n-1};\end{cases}$$

(2) 设 k 是不能被任何质数的平方整除的自然数．上述差分方程组能否作为求 $\sqrt{k}$ 近似分数值分子、分母的一般公式？为什么？

4．在定理 5 的条件下，若 $|\alpha_2|>|\alpha_i|(i=3,4,\cdots,s)$ 且 α_1 是单根，证明(12.4)成立．

5．试用贝努利方法求方程 $x^4-3x^3-x^2+6x-2=0$ 的最大实根$\left(用\dfrac{x_{10}}{x_9}作近似值\right)$．

6．设差分方程(12.2)的特征多项式只有实单根，且有无穷多个 n 满足 $x_n=0$．求证：$x_n=0$ 或者对所有奇数 n 成立，或者对所有偶数 n 成立．

7．证明，若差分方程(12.2)在任意初始条件下的解 x_n 有界，则其

特征根的绝对值都不大于1，且绝对值为1的特征根必为单根.

又问：若其特征根绝对值都小于1时，$\lim_{n\to\infty} x_n$ 等于什么？

8. 求证，分式线性差分方程

$$a_{n+1}=\frac{k(m+a_n)}{k+ma_n} \quad (m>0)$$

可作为求 $\sqrt{k}$ 近似值的迭代公式. 又问：怎样选择参数 m，可使精度提高得较快？

9.（第十七届加拿大中学生数学竞赛题） 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2,$$

且$1<x_1<2$. 证明：对于 $n\geqslant 3$，有

$$|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}.$$

10. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足(12.7)和 $x_1=0$, $x_2=1$. 证明

(1) x_n 与 x_{n+1} 互质($n\geqslant 2$)；

(2) 将 $\frac{x_{n+1}}{x_n}-2$ ($n\geqslant 2$)表为分数 $\frac{r}{s}$，则 $r^2-5s^2=\pm 1$.

11. 证明，当 $n>1$ 时，在差分方程(1.13) 及 $a_1=3$ 的条件下求得的 $\frac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$，与在(12.10)及 $\alpha_1=3$, $\beta_1=1$ 的条件下求得的 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ 相等.

又问，根据以上结论及本节习题3，你能为第一节中计算 $\sqrt{2}$ 近似值的方法解释理由吗？

十三、差分方程与数学各学科的联系*

差分方程虽然不算高深，却是数学瀚海中一个重要的工具，有着非常广泛的应用.

最重要的应用领域大概可以算是计算数学了. 在上一节，我们已经看到在代数方程的数值解问题中如何应用差分方程. 如果将它推广，还可以用在解函数方程等问题上.**但这些都还不是最重要的. 重大的问题，例如偏微分方程的边界值问题，在几十年前就已经建立起所谓差分方法了. 我们来看下面的例子.

【例 1】 考虑椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{13.1}$$

在一个闭区域 Ω 中的边界值问题. 我们把 Ω 按坐标划分成网格，沿 x 轴和 y 轴方向的长度单位都取作 d. 假定 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 都连续，则当 d 充分小时，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&\approx\frac{f(x+d,\ y)+f(x-d,\ y)-2f(x,\ y)}{d^2},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&\approx\frac{f(x,\ y+d)+f(x,\ y-d)-2f(x,\ y)}{d^2}.\end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

我们用方程

---

* 本节的内容完全是介绍性的，目的仅在于使读者了解差分方程应用的广泛性. 其中有些内容涉及一些较专门的知识. 对这些方面的基础知识不了解的读者可以只看结果，而不必深究例题或其他方面的细节.

** 见参考文献[16].

$$\frac{f(x+d,\ y)+f(x-d,\ y)-2f(x,\ y)}{d^2}$$

$$+\frac{f(x,\ y+d)+f(x,\ y-d)-2f(x,\ y)}{d^2}=0 \qquad (13.3)$$

来近似地替代(13.1). 化简后得

$$f(x+d,\ y)+f(x-d,\ y)+f(x,\ y+d)$$
$$+f(x,\ y-d)=4f(x,\ y). \qquad (13.4)$$

如果我们仅考虑 f 在网格点上的值，它就可以看作两个整变量的函数. 再记

$$F(m,\ n)=f(md,\ nd), \qquad (13.5)$$

于是(13.4)就给出关于 $F(m,\ n)$的一个偏差分方程

$$F(m+1,\ n)+F(m-1,\ n)+F(m,\ n+1)$$
$$+F(m,\ n-1)=4F(m,\ n). \qquad (13.6)$$

再将 f 的边界条件近似地化为 (13.6) 的边界条件(初始条件). 我们就用(13.6)的边界值问题的解作为 f 的近似结果. 当然这种解法的合理性是个很不简单的问题. 至于(13.6)的边界条件解，除了直接方法外，还可以利用随机试验的方法(所谓“蒙特·卡洛法”)，其原理类似于下面的例 3.

由于计算数学和计算机科学的突飞猛进，例 1 这样的方法现在几乎可以看作“古典方法”了. 但各种新的更先进的方法仍然离不开差分方程.

下面这个例题也是计算方法方面的.

【例 2】 设数列$\{a_n\}(n>0)$满足条件

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-k}}{k}, \quad (n>k) \qquad (13.7)$$

其中 k 是一个固定的正整数. 换言之，自第 $k+1$ 项起，各项都等于它前 k 项的算术平均. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求出这个

极限值.

解 (13.7)实际上是一个常系数线性齐次差分方程，其特征多项式为

$$f(x)=x^k-\frac{1}{k}(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1). \qquad (13.8)$$

将 $f(x)$ 分解因式，得

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{k}[(x^k-x^{k-1})+(x^k-x^{k-2})+\cdots+(x^k-1)] \\ &=\left(\frac{x-1}{k}\right)[x^{k-1}+x^{k-2}(x+1)+\cdots \\ &\quad+(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)] \\ &=\left(\frac{x-1}{k}\right)[kx^{k-1}+(k-1)x^{k-2}+\cdots+2x+1], \end{aligned} \qquad (13.9)$$

可见 $x=1$ 是 $f(x)$ 的单根.

我们来证明 $f(x)$ 的其他根绝对值都小于 1.

设 $f(x)$ 有一个根 z 满足 $|z|\geqslant 1$，则

$$k|z^k|\geqslant|z^{k-1}|+|z^{k-2}|+\cdots+|z|+1,$$

其中等号仅当 $|z|=1$ 时成立. 而

$$\begin{aligned}\left|z^k-\frac{1}{k}(z^{k-1}+\cdots+1)\right|&\geqslant|z^k|-\frac{1}{k}|z^{k-1}+\cdots+1| \\ &\geqslant\frac{1}{k}(k|z|^k-|z^{k-1}|-\cdots-|z|-1)\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (13.10)$$

但由于 $f(z)=0$，又有 $\left|z^k-\frac{1}{k}(z^{k-1}+z^{k-2}+\cdots+1)\right|=0$，可见(13.10)只有都取等号才成立，因此必有 $|z|=1$. 另一方面，$|z^{k-1}+z^{k-2}+\cdots+z+1|=|z^{k-1}|+|z^{k-2}|+\cdots+|z|+1$ 只有当 $z^{k-1}, z^{k-2}, \cdots, z, 1$ 辐角主值全相同时才能成立. 这样有 $z=1$，即只有 1 是绝对值不小于 1 的特征根.

设 $f(x)$ 异于 1 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别是 $d_1, d_2, \cdots, d_s$. 那么方程 (13.7) 对于给定的初始值 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的解形如

$$a_n = a + g_1(n)\lambda_1^n + g_2(n)\lambda_2^n + \cdots + g_s(n)\lambda_s^n,$$

其中 a 为常数，g_i 为 $d_i - 1$ 次多项式 $(1 \leqslant i \leqslant s)$. 由于 $|\lambda_i| < 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_i(n)\lambda_i^n = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$. 因而有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

这证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的存在. 现在再来计算 a.

令 $b_n = a_n - a = g_1(n)\lambda_1^n + g_2(n)\lambda_2^n + \cdots + g_s(n)\lambda_s^n$，则 b_n 满足一个常系数线性齐次差分方程，其特征根仅比多项式 (13.8) 的根少 1. 因此它的特征多项式应该是

$$\frac{f(x)}{x-1} = x^{k-1} + \frac{1}{k}[(k-1)x^{k-2} + \cdots + 2x + 1],$$

所以 $\{b_n\}$ 满足的差分方程为

$$b_n + \frac{1}{k}[(k-1)b_{n-1} + \cdots + 2b_{n-k+2} + b_{n-k+1}] = 0. \tag{13.11}$$

将 $b_n = a_n - a$ 代入 (13.11)，得

$$k(a_n - a) + (k-1)(a_{n-1} - a) + \cdots + 2(a_{n-k+2} - a) + (a_{n-k+1} - a) = 0,$$

令 $n = k$，我们就得到

$$a = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{\frac{k(k+1)}{2}}, \tag{13.12}$$

这正是我们所要求的极限值. 它是 1 个 a_1，2 个 a_2，$\cdots$，k 个 a_k 这 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个数的算术平均值. 请读者回忆一下，前面哪个例题便是这个问题的一个特例？

在数论中，差分方程是一个不可缺少的工具. 这在第十节中已经有不少例子了. 在常微分方程的一些问题中，也使用了差分方程方法. 在函数结构论中也常用差分方程作工具.

许多特殊函数都满足一个差分方程. 例如:

切比雪夫多项式 它的定义为

$$T_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

它显然满足差分方程 $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$;

勒让德多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，它满足差分方程 $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$;

厄米特多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

满足 $H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$;

拉盖尔函数 $L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$，满足差分方程

$$L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0.$$

下面的例子使我们看到差分方程在概率论中的应用.

【例 3】(具有吸收壁的随机游动) 设一个动点在实数轴上的闭区间 $[0, N]$ 上随机地游动 (N 是正整数). 运动是"离散的"，即每次仅停留在一个坐标为整数的位置. 若动点处在位置 $k(0<k<N)$，则它以概率 $p(0<p<1)$ 跳到 $k+1$，或以概率 $q=1-p$ 跳到 $k-1$. 若动点落到 0 或 N，则它将永远停

在那里,或者说被 0 或 N “吸收”了. 0 和 N 因而被叫做“吸收壁”.

以 P_k^0 和 P_k^N 分别表示动点从 k 出发最终被 0 或 N 吸收的概率. 我们现在来计算 P_k^0 和 P_k^N.

经过一次游动, 动点以概率 p 落在点 $k+1$, 而以概率 q 落在点 $k-1$, 故有

$$P_k^0=pP_{k+1}^0+qP_{k-1}^0. \tag{13.13}$$

若把 P_k^0 看作 k 的函数, (13.13)就是一个二阶常系数线性齐次差分方程. 它显然满足

$$P_0^0=1,\ P_N^0=0. \tag{13.14}$$

尽管(13.14)不是符合标准的初始条件,但它仍可以确定(13.13)的解. 由(13.13)和(13.14),当 $p\neq q$ 时可得到

$$P_k^0=\frac{p^{N-k}-q^{N-k}}{p^N-q^N}q^k. \tag{13.15}$$

利用对称性,将 p, q, k 分别易作 q, p, $N-k$, 可以得到

$$p_k^N=\frac{p^k-q^k}{p^N-q^N}p^{N-k}.$$

注意到 $P_k^0+P_k^N=1$, 我们说动点几乎迟早要被吸收壁吸收掉的.

会编制计算机程序的读者不妨编一个程序来验证(13.15).

差分方程在不等式理论中也有应用.

【例 4】 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数. 证明范墩不等式

$$x_1^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2$$

$$\geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}x_k^2. \tag{13.16}$$

证明 (13.16)的左边是一个二次型,它的矩阵是

$$A_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们来计算 A_n 的特征根. 令 $f_n(x)=|xI_n-A_n|$, 其中 I_n 为 n 阶单位阵. 按第一行展开 $|xI_n-A_n|$, 我们得到

$$\begin{aligned} f_n(x)&=(x-2)|xI_{n-1}-A_{n-1}|-|xI_{n-2}-A_{n-2}| \\ &=(x-2)f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x). \end{aligned} \tag{13.17}$$

(13.17)可以看作一个关于 n 的线性齐次差分方程. 我们把关于 x 的多项式$(x-2)$看作参变量. 它的初始条件是

$$f_1(x)=x-2,\ f_2(x)=\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}=x^2-4x+3.$$

解这个差分方程, 得

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}\left[\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{n+1}\right]. \tag{13.18}$$

再来计算 $f_n(x)$的根. 由于

$$\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}=\frac{2}{x-2-\sqrt{x^2-4x}},$$

所以满足 $f_n(x)=0$ 的 x 代入(13.18)右边后, 有

$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{2(n+1)}=1,$$

就是说,

$$\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}=\cos\frac{k\pi}{n+1}+i\sin\frac{k\pi}{n+1},$$

$$(0\leqslant k\leqslant 2n+1) \tag{13.19}$$

将(13.19)两边取倒数，得

$$\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}=\cos\frac{k\pi}{n+1}-i\sin\frac{k\pi}{n+1}. \quad (13.20)$$

再将(13.19)和(13.20)相加，得

$$x-2=2\cos\frac{k\pi}{n+1},$$

这里，有 $0\leqslant k\leqslant n+1$. 因为

$$\cos\frac{n+1+k}{n+1}\pi=\cos\frac{n+1-k}{n+1}\pi.$$

另一方面，由于 $f_n(x)$ 次数是 n，它至多有 n 个互不相同的根. 注意到(13.18)，$x=0$ 和 $x=4$ 都是增根，即 k 不能取 0 和 $n+1$. 这就是说，A_n 的特征根为

$$x=2+2\cos\frac{k\pi}{n+1}=4\sin^2\frac{(n+1-k)\pi}{2(n+1)}, \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

最小的一个特征根是 $4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$. 因此，

$$A_n-4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}I_n$$

是半正定的. 这就证明了(13.16).

从证明过程中还可以看出，(13.16)右端的常数 $4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$ 是最佳选择，就是说不能换成更大的数了.

差分方程在几何中的应用可以举希尔伯特多项式为例. 希尔伯特多项式是一种整值多项式，它出现在射影几何、交换代数、不变量理论等不同学科中，定义各不相同，研究方法也有差别，却都离不开差分方法.

甚至在某些高深的数学学科中，也有差分方程的应用. 下面就是一个例子.

【例 5】 设 X 是一个紧致解析流形.* 若 L 是 X 上的一个(解析)直线丛，则以 $[L]$ 表示 L 的等价类. 直线丛的等价类有"加法"运算：两个直线丛 L, L' 的纤维积的等价类 $[L\times_X L']$ 记作 $[L]+[L']$. 这种加法满足交换律、结合律；平庸直线丛 $[O_X]$ 起着加法中"0"的作用，任何直线丛 L 都有"对偶直线丛" $\hat{L}$，使 $[\hat{L}]+[L]=[O_X]$. 一言以蔽之："直线丛的等价类组成一个阿贝尔群."

设 X 是一个阿贝尔簇(即紧致连通代数群)，n_X 为"乘以 n"同态. 对 X 上的任一直线丛 L，记 $L_n=n_X^*L$. 则由"立方公式"，有

$$[L_{n+2}]-2[L_{n+1}]+[L_n]=[L_1]+[L_{-1}],\ [L_0]=[O_X]. \tag{13.21}$$

尽管直线丛的等价类不是数，我们仍然可以把(13.21)当作一个差分方程来处理，用下面的方法来解(13.21).

先设

$$[M_n]=[L_{n+1}]-[L_n], \tag{13.22}$$

则

$$\begin{aligned}[M_{n+1}]-[M_n]&=([L_{n+2}]-[L_{n+1}])-([L_{n+1}]-[L_n])\\&=[L_{n+2}]-2[L_{n+1}]+[L_n]\\&=[L_1]+[L_{-1}],\end{aligned}$$

也就是

$$[M_{n+1}]=[M_n]+[L_1]+[L_{-1}]. \tag{13.23}$$

而 $[M_0]=[L_1]-[L_0]=[L_1]-[O_X]=[L_1]$. 由(13.23)进行归纳，可得

$$\begin{aligned}[M_n]&=n([L_1]+[L_{-1}])+[M_0]\\&=(n+1)[L_1]+n[L_{-1}],\end{aligned}$$

代入(13.22)，得

* 不了解纤维丛的读者可以略过这些定义直接看后面内容.

$$[L_{n+1}]=[M_n]+[L_n]=(n+1)[L_1]+n[L_{-1}]+[L_n].$$

再次使用归纳法，得

$$[L_n]=(1+2+\cdots+n)[L_1]+(1+2+\cdots+(n-1))[L_{-1}]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}[L_1]+\frac{n(n-1)}{2}[L_{-1}]. \qquad (13.24)$$

由逆向归纳法不难验证，当 $n<0$ 时，(13.24)也成立.

上面的这些例子显示了差分方程的生命力. 可以预料，差分方程将会有进一步的发展和更广泛的应用.

习 题 十 二

1. 设数列$\{a_n\}$由正实数组成，且当 $n>k$ 时，a_n 是 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$ 的几何平均（即 $a_n=\sqrt[k]{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-k}}$）. 问 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在吗?

2. 试证

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)=\frac{n}{2}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^l(n-l-1)!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}.$$

$(n\geqslant1)$

3. 证明:

(1) $P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$;

(2) $L_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!}x^k$.

4. 对函数$P_n(x)$, $H_n(x)$和$L_n(x)$，验证它们所满足的差分方程.

5. 在例 3 中，若 $p=q=\frac{1}{2}$，P_k^a 和 P_k^b 等于什么?

6. 在例 3 中，若动点处在位置 k 时也可能停留在位置 k，换言之，以概率 p 游到 $k+1$，以概率 q 游到 $k-1$，以概率 r 留在 $k(p+q+r=1)$，我们会有什么结论?

7. 讨论范德蒙不等式等号成立的条件.

附录I 算　子

为了证明本书的主要定理——第三节的定理3(即常系数线性齐次差分方程的通解公式),我们引入算子的概念.

定义 算子是函数集到自身的映射.

这个定义很抽象,对它可以作如下理解:算子是一种"运算".当给定了一个函数 $g(n)$ 时,我们就可以用某一个算子对它"作用",得到另一个函数 $h(n)$.而每一个算子都具有确定的"作用"方法,因此结果是唯一确定的.

算子的表达方式通常是先写一个字母表示算子符号,后面写上被作用的函数.举几个例子.

1. 前驱算子 D:满足 $Dg(n)=g(n-1)$;
2. 后继算子 S:满足 $Sg(n)=g(n+1)$;
3. 算子 I:满足 $Ig(n)=g(n)$.

其中 $g(n)$ 是一个任意的整变量函数.

这些算子还可以复合成新的算子.例如

$$D^2g(n)=D[Dg(n)]=Dg(n-1)=g(n-2),$$

$$(S+2I)g(n)=Sg(n)+2Ig(n)=g(n+1)+2g(n),$$

等等.

一般地,两个算子 X, Y 的和、积定义为

$$(X+Y)g(n)=Xg(n)+Yg(n),$$

$$(X\cdot Y)g(n)=X[Yg(n)].$$

若 $h(n)$ 是一个 n 的函数,X 为一个算子,则定义

$$[h(n)X]g(n)=h(n)\cdot Xg(n).$$

更进一步，若 $F(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$ 为一个多项式，定义算子 $F(s)$ 为

$$F(s)g(n)=s^kg(n)+a_1s^{k-1}g(n)+\cdots+a_kIg(n)$$
$$=g(n+k)+a_1g(n+k-1)+\cdots+a_kg(n).$$

若 $F(x)$, $G(x)$ 是两个多项式，且 $F(x)\cdot G(x)=H(x)$，则有

$$F(s)\cdot G(s)=H(s).$$

作为练习，由读者自己验证．同时可以再考虑一下，这个结论是否也适用于前驱算子 D?

引理 I.1 设多项式 $H(x)=F(x)\cdot G(x)$, $g(n)$ 为一个整变量函数，$f(n)=G(s)g(n)$．则 $g(n)$ 满足 $H(s)g(n)=0$ 当且仅当 $f(n)$ 满足 $F(s)f(n)=0$.

理由很简单，因为

$$H(s)g(n)=F(s)[G(s)g(n)]=F(s)f(n).$$

命题 I.1 设整变量函数 $g(n)$ 满足常系数线性齐次差分方程

$$G(s)g(n)=0,$$

多项式 $H(x)=G(x)F(x)$，则差分方程

$$F(s)a_n=g(n)$$

的解

$$a_n=f(n)$$

满足常系数线性齐次差分方程

$$H(s)a_n=0.$$

命题 I.1 的证明也很容易．只需用算子 $G(s)$ 对等式 $F(s)f(n)=g(n)$ 的两边“作用”一下便得到 $H(s)f(n)=0$ 了．这就说明，我们可以通过解方程 $H(s)a_n=0$ 来求方程 $F(s)a_n=g(n)$ 的解．这正是第四节方法的一般情况．注意，$G(x)$ 和 $F(x)$ 的根合起来便是 $H(x)$ 的全部根，因而也就是 $H(s)a_n=0$ 的全部特征根.

算子作为一种工具有很多重要的应用．如附录 II 中常

系数线性齐次常差分方程通解公式的证明. 下面的"两端无穷数列"的有界性问题则又是一例.

引理 I.2 设互不相等的复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是多项式 $f(x)$ 的所有根, λ_i 的重数是 $m_i(i=1, 2, \cdots, k)$. a_n 是差分方程 $f(S)a_n=0$ 的解, 且 a_n 不满足任何更低阶的常系数线性齐次差分方程. 则数列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是: $|\lambda_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant k)$, 且若 $|\lambda_i|=1$, 则 $m_i=1$.

证明 根据前面关于算子内容的叙述可知, $f(S)a_n=0$ 是以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 为特征根的常系数线性齐次差分方程, 因而有

$$a_n=g_1(n)\lambda_1^n+g_2(n)\lambda_2^n+\cdots+g_k(n)\lambda_k^n, \qquad (\text{I}.1)$$

其中 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 为多项式. 因为 a_n 不满足任何更低阶的常系数线性齐次差分方程, 所以 g_i 的次数为 $m_i-1(i=1, 2, \cdots, k)$.

当 $|\lambda_i|<1$ 时, 由于

$$|g_i(n)\lambda_i^n|\leqslant|g_i(n)|\cdot|\lambda_i|^n\to 0 \quad (n\to\infty),$$

说明 $g_i(n)\lambda_i^n$ 有界. 而 $|\lambda_i|=1$ 时, 由于 $m_i=1$, 则 $|g_i(n)\lambda_i^n|=|g_i|$ 是常数. 这样, 由(I.1)有

$$|a_n|\leqslant|g_1(n)\lambda_1^n|+|g_2(n)\lambda_2^n|+\cdots+|g_k(n)\lambda_k^n|,$$

便得到 $\{a_n\}$ 有界. 以下再证明必要性.

先对任一个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$, 作

$$f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{m_j}=\frac{f(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}}.$$

注意到

$$(S-\lambda_i I)[g_i(n)\lambda_i^n]=g_i(n+1)\lambda_i^{n+1}-g_i(n)\lambda_i^{n+1}$$
$$=[g_i(n+1)-g_i(n)]\lambda_i^{n+1},$$

而 $g_i(n+1)-g_i(n)$ 是 m_i-2 次(即比 $g_i(n)$ 次数低一次)的 n 的多项式, 由归纳法便有

$$(S-\lambda_i I)^{m_i}[g_i(n)\lambda_i^n]=0.$$

另一方面，对任意 $j\neq i$，又有

$$\begin{aligned}(S-\lambda_j I)[g_i(n)\lambda_i^n]&=g_i(n+1)\lambda_i^{n+1}-g_i(n)\lambda_j\lambda_i^n\\&=[\lambda_i g(n+1)-\lambda_j g(n)]\lambda_i^n.\end{aligned}$$

由于 $\lambda_i\neq\lambda_j$，所以 $\lambda_i g_i(n+1)-\lambda_j g_i(n)$ 仍是 m_i-1 次多项式. 于是，$(S-\lambda_j I)^{m_j}[g_i(n)\lambda_i^n]$ 也仍是一个 m_i-1 次 n 的多项式与 λ_i^n 的乘积. 也就是说，

$$f_j(s)[g_i(n)\lambda_i^n]=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq i \text{ 时},\\ h_i(n)\lambda_i^n, & \text{当 } j=i \text{ 时},\end{cases}$$

其中 h_i 是 m_i-1 次多项式. 这样，有

$$\begin{aligned}f_i(s)a_n&=f_i(s)[g_1(n)\lambda_1^n+g_2(n)\lambda_2^n+\cdots+g_k(n)\lambda_k^n]\\&=h_i(n)\lambda_i^n.\end{aligned}$$

由于 $\{a_n\}$有界，则存在 $M>0$，使 $|a_n|\leqslant M$ 对任意自然数 n 成立. 而

$$\begin{aligned}|(S-\lambda_j I)a_n|&=|a_{n+1}-\lambda_j a_n|\leqslant|a_{n+1}|+|\lambda_j|\cdot|a_n|\\&\leqslant M(1+|\lambda_j|),\end{aligned}$$

即$\{(S-\lambda_j I)a_n\}$ 也有界. 通过归纳便可得出$\{(S-\lambda_j I)^{m_j}a_n\}$同样有界. 令 $j=1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ k$，便知$\{f_i(s)a_n\}$也应是有界的. 这就是说，$h_i(n)\lambda_i^n$ 是 n 的有界函数，因而有 $|\lambda_i|\leqslant 1$，而且当 $|\lambda_i|=1$ 时，h_i 应为一个常数. 再由 i 的一般性，便使引理中的必要性得以证明.

有了引理 I.2，就可以得出两端无穷数列有界的条件了.

命题 I.2 设$\{a_n\}_{-\infty<n<+\infty}$是一个两端无穷数列，$a_n$ 满足常系数线性齐次差分方程 $f(s)a_n=0$，而不满足任何更低阶的常系数线性齐次差分方程. 当且仅当方程 $f(s)a_n=0$ 的特征多项式 $f(x)$ 的根都是绝对值为 1 的单根时，$\{a_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ 是

有界的.

根据引理 I.2, 不难证明这个命题的正确性. 因为当 $n\geq 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是 $f(x)$ 的任意一个根 λ_i 都满足 $|\lambda_i|\leq 1$, 且若 $|\lambda_i|=1$, 则 λ_i 为单根. 如果我们再考虑 $a_{-1}, a_{-2}, \cdots, a_{-n}, \cdots$, 此时有界的条件又是什么呢? 我们令 $b_n=a_{-n}(n=1, 2, \cdots)$, 则 b_n 满足一个常系数线性齐次差分方程, 其特征根正是 $f(x)$所有根的倒数(见习题四第13题). 因此, $\{b_n\}$ 有界的充要条件为 $\left|\frac{1}{\lambda_i}\right|\leq 1$, 且当 $\left|\frac{1}{\lambda_i}\right|=1$ 时, $\frac{1}{\lambda_i}$ 是它的特征多项式的单根. 即当 $n<0$ 时, 要使 $\{a_n\}$ 也有界, 则需 $|\lambda_i|\geq 1$. 综合 a_n 在 $n\geq 0$ 和 $n<0$ 时有界的条件, 便可得出 $|\lambda_i|=1$ 且 λ_i 为 $f(x)$的单根. 这就是说, 特征多项式 $f(x)$仅有绝对值为 1 的单根.

按照命题 I.2, 我们还可以得出这样的结论: 若 $f(x)$为一个多项式, 则以差分方程 $f(s)a_n=0$ 的任何解 a_n 为通项的两端无穷数列都有界, 当且仅当 $f(x)$ 仅有绝对值为 1 的单根.

附录II 常系数线性齐次常差分方程的通解公式

在第三节中，给出了常系数线性齐次差分方程的通解定理．即：

定理3 差分方程

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ka_{n-k}=0 \qquad (3.1)$$

($p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为常数，且 $p_k\neq0$) 在任意给定的初始条件 $a_1=f(1), a_2=f(2), \cdots, a_k=f(k)$ 下，都有形如

$$a_n=f(n)=\sum_{0\leq j\leq k_i-1} C_{ij}n^j\lambda_i^n \qquad (3.11)$$

的解．其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是多项式

$$x^k+p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k \qquad (3.3)$$

的所有互不相同的根，λ_i 的重数是 k_i，C_{ij} 是由初始条件确定的常数($i=1, 2, \cdots, r; j=0, 1, \cdots, k_i-1$)．

反之，形如(3.11)右端的函数 $f(n)$ 一定满足一个形如(3.1)的方程．

定理3中的公式(3.11)，称为常系数线性齐次常差分方程的通解公式．

现在，我们来证明这个定理．为此，需要先引入并证明下列各引理．

引理II.1 设 λ 为非零常数，$g(n)$ 为 n 的已知函数，则差分方程

$$a_n=\lambda a_{n-1}+g(n) \qquad (\text{II}.1)$$

的解为

$$x_n=\lambda^n x_0+\sum_{k=1}^{n} g(k)\lambda^{n-k}. \tag{II.2}$$

注意到在方程(8.1)中，只需令 $f(n)=\lambda$ 便得到(II.1)，所以我们可以按第八节的方法去解方程(II.1)．引理(II.1)的证明留给读者．

引理 II.2 设 f 是一个 m 次多项式，λ 是不等于 0 或 1 的常数，则 $\lambda^k f(k)$ 的和分 $\sum_{k=1}^{n}\lambda^k f(k)$ 具有 $\lambda^n g(n)+C$ 的形式，其中 $g(n)$ 为 n 的 m 次多项式，C 为常数．

证明 对 f 的次数 m 用数学归纳法．

1．当 $m=0$ 时，f 是非零常数．$\{\lambda^k f(k)\}$ 是等比数列．由等比数列求和公式可知结论成立．

2．设 $m>0$．令

$$P(k)=\lambda^k f(k)-\frac{a_0}{\lambda-1}\lambda^k[\lambda(k+1)^m-k^m],$$

其中 a_0 为 f 的 m 次项系数．由于 $\lambda(k+1)^m-k^m$ 是 m 次项系数为 $\lambda-1$ 的 k 的多项式，故 $P(k)$ 是 λ^k 与一个次数低于 m 的 k 的多项式之积．根据归纳假设，$P(k)$ 的和分为 $\lambda^n P_1(n)+C_1$ 的形式，其中 $P_1(n)$ 是 n 的次数小于 m 的多项式，C_1 为常数．而 $\lambda^k[\lambda(k+1)^m-k^m]=\Delta\lambda^k k^m$，则有

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\lambda^k k^m=\lambda^{n+1}(n+1)^m-\lambda.$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^k f(k)=\sum_{k=1}^{n}\left\{P(k)+\frac{a_0}{\lambda-1}\lambda^k[\lambda(k+1)^m-k^m]\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(k)+\frac{a_0}{\lambda-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda^k[\lambda(k+1)^m-k^m]$$

$$=\lambda^n P_1(n)+C_1+\frac{a_0}{\lambda-1}\lambda^{n+1}(n+1)^m-\frac{a_0\lambda}{\lambda-1}.$$

令 $g(n)=P_1(n)+\frac{\lambda a_0}{\lambda-1}(n+1)^m$，$C=C_1-\frac{a_0\lambda}{\lambda-1}$，则 $\lambda^k f(k)$的和分便具有了 $\lambda^n g(n)+C$ 的形式，这里的 $g(n)$正是一个 n 的m次多项式.

根据1和2，对任意非负整数 m，引理 II.2 的结论都成立.

引理 II.3 设 f 是m次多项式，则 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 是 n 的 $m+1$ 次多项式.

证明 对 f 的次数m用数学归纳法.

1. 当 $m=0$ 时，$f=a$ 为非零常数. $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=an$ 是 n 的一次多项式.

2. 假设结论对 $m-1$ 成立.

我们先来证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^m$ 是 n 的 $m+1$ 次多项式. 因为

$$\begin{aligned}n^{m+1}&=\sum_{k=1}^{n}[k^{m+1}-(k-1)^{m+1}]\\&=\sum_{k=1}^{n}[C_{m+1}^1k^m-C_{m+1}^2k^{m-1}+\cdots+(-1)^m]\\&=(m+1)\sum_{k=1}^{n}k^m-\sum_{k=1}^{n}[C_{m+1}^2k^{m-1}-\cdots+(-1)^{m-1}],\end{aligned}$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{1}{m+1}\left\{n^{m+1}+\sum_{k=1}^{n}[C_{m+1}^2k^{m-1}-\cdots+(-1)^{m-1}]\right\}.$$

根据假设，$\sum\limits_{k=1}^{n}[C_{m+1}^2k^{m-1}-\cdots+(-1)^{m-1}]$ 是 n 的m次多

项式，故 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 是 n 的 $m+1$ 次多项式. 这样，对于任何一个 m 次多项式 $f(k)=a_0k^m+a_1k^{m-1}+\cdots+a_m$，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=a_0\sum_{k=1}^{n} k^m+\sum_{k=1}^{n}(a_1k^{m-1}+a_2k^{m-2}+\cdots+a_m),$$

是 n 的 $m+1$ 次多项式. 从而引理 II.3 的结论对任意非负整数 m 成立.

从上述证明过程中我们还可以知道，n 的 $m+1$ 次多项式 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 的 $m+1$ 次项系数为 $\frac{a_0}{m+1}$（a_0 是 f 的 m 次项系数）.

下面我们就来证明定理 3.

先将差分方程(3.1)简记为 $F(s)a_n=0$（s 为后继算子）.* 根据代数基本定理，多项式 $F(x)$ 可以分解成 k 个一次因式的乘积：

$$F(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k), \quad \text{(II.3)}$$

于是，$F(s)a_n=0$ 亦可表示为

$$(S-\alpha_1 I)(S-\alpha_2 I)\cdots(S-\alpha_k I)a_n=0. \quad \text{(II.4)}$$

我们通过对 k 用数学归纳法来证明定理.

1. 当 $k=1$ 时，方程为 $a_n+p_1a_{n-1}=0$. 由等比数列求和公式，立即可验证结论的正确性.

2. 设 $b_n=(s-\alpha_k I)a_n$，则(II.4)就可写成

$$(S-\alpha_1 I)(S-\alpha_2 I)\cdots(S-\alpha_{k-1} I)b_n=0. \quad \text{(II.5)}$$

这是一个 $k-1$ 阶常系数线性齐次差分方程. 假设

$$b_n=\sum_{\substack{0\le j\le k_i-1\\ \sum_i k_i=k-1}} d_{ij}n^j\lambda_i^n,$$

其中 λ_i 是多项式 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{k-1})$ 的 k_i 重根. 也就

* 这里之所以可以这样简记，是因为方程(3.1)与方程 $a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\cdots+p_ka_n=0$ 是同一个方程.

是说，α_1, α_2, $\cdots$, α_{k-1} 中有 k_i 个与 λ_i 相等.

a_n, b_n 之间满足 $a_{n+1}=\alpha_k a_n+b_n$. 根据引理 II.1，有

$$a_n=\alpha_k^n a_0+\sum_{l=1}^{n} b_l \alpha_k^{n-l}=\alpha_k^n a_0+\sum_{l=1}^{n}\sum_{0\le j\le k_i-1} d_{ij} l^j \lambda_i^l \alpha_k^{n-l}.$$

注意到 λ_1, λ_2, $\cdots$是方程 $F(x)=0$ 的根，对 α_k 分以下两种情况讨论：

(a) α_k 是 $F(x)=0$ 的单根. 此时，

$$a_n=\alpha_k^n a_0+\alpha_k^n\sum_{l=1}^{n}\sum_{0\le j\le k_i-1} d_{ij} l^j\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_k}\right)^l.$$

因为 $\dfrac{\lambda_i}{\alpha_k}\neq 1(i=1, 2, \cdots)$，由引理 II.2 可知

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{0\le j\le k_i-1} d_{ij} l^j\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_k}\right)^l=\sum_{0\le j\le k_i-1} C_{ij} n^j\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_k}\right)^n+C,$$

其中常数 C_{ij} 由 d_{ij} 及初始条件所确定. 这样，

$$a_n=(a_0+C)\alpha_k^n+\sum_{\substack{0\le j\le k_i-1\\ \sum_i k_i=k-1}} C_{ij} n^j \lambda_i^n, \qquad \text{(II.6)}$$

而 α_k 是 λ_1, λ_2, $\cdots$中之一，a_0+C 是一个常数，则(II. 6)可以记作 $a_n=\sum\limits_{\substack{0\le j\le k_i-1\\ \sum_i k_i=k}} C_{ij} n^j \lambda_i^n$，即(3.11).

(b) α_k 是 $F(x)=0$ 的重根. 此时不妨设 $\alpha_k=\lambda_r$，是 $F(x)=0$ 的 k_r 重根. 于是，它就是方程(II.5)的 k_r-1 重特征根. 由于 $\dfrac{\lambda_1}{\alpha_k}$, $\dfrac{\lambda_2}{\alpha_k}$, $\cdots$, $\dfrac{\lambda_{r-1}}{\alpha_k}$ 都不等于 1，仍然可以根据引理 II.2 得

$$\alpha_k^n\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{0\le j\le k_i-1\\ 1\le i\le r-1}} d_{ij} l^j\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_k}\right)^l=\sum_{\substack{0\le j\le k_i-1\\ 1\le i\le r-1}} C_{ij} n^j \lambda_i^n.$$

但是，$\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k_r-2} d_{rj} l^j \lambda_r^l \alpha_k^{n-l}=\alpha_k^n\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k_r-2} d_{rj} l^j$，由于 $\sum\limits_{j=0}^{k_r-2} d_{rj} l^j$ 是

i 的 k_r-2 次多项式，根据引理 II.3，这个和式等于 α_r^n 与一个关于 n 的 k_r-1 次多项式之积. 也就是说，a_n 仍具有(3.11)的形式.

综合 1 和 2，得知定理 3 的前半部分成立.

欲证明定理后半部分，只需验证 $f(n)$ 满足 $F(S)f(n)=0$. 因而也就只需有 $F(S)[h_i(n)\lambda_i^n]=0(i=1, 2, \cdots, r)$. 其中 $h_i(n)$ 是 n 的 k_i-1 次多项式.

因为 λ_i 是 $F(x)=0$ 的 k_i 重根，我们将 $F(x)$ 记作 $G(x)\cdot(x-\lambda_i)^{k_i}$，$G(x)$ 也是多项式. 于是有

$$F(S)[h_i(n)\lambda_i^n]=G(S)\cdot(S-\lambda_i I)^{k_i}[h_i(n)\lambda_i^n],$$

而 $(S-\lambda_i I)[h_i(n)\lambda_i^n]=\lambda_i^{n+1}[h_i(n+1)-h_i(n)]=\lambda_i^{n+1}\Delta h_i(n)$，$\Delta h_i(n)$ 比 $h_i(n)$ 次数降低了一次，由归纳法，

$$(S-\lambda_i I)^{k_i}[h_i(n)\lambda_i^n]=0$$

(当 $h_i(n)$ 为常数时，$(S-\lambda_i I)[h_i(n)\lambda_i^n]=0$).

这样便有 $F(S)f(n)=0$. 证毕.

当对方程(3.1)给定了初始条件

$$a_0=f(0),\ a_1=f(1),\ \cdots,\ a_{k-1}=f(k-1) \tag{II.7}$$

时，由差分方程解的存在唯一性(见第二节)可知，一定存在(唯一的)一组常数 C_{ij}，使得(3.11)是方程(3.1)在初始条件(II.7)下的解. 因此，以 C_{ij} 为未知数的线性方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant k_i-1} C_{ij}n^j\lambda_i^n=f(n), \\ (0\leqslant n\leqslant k-1) \end{cases} \tag{II.8}$$

应当对任意给定的 $f(0), f(1), \cdots, f(k-1)$ 都有唯一解. 而事实上，学过线性代数的读者知道，这又等价于(II.8)左端的系数行列式不等于零.

这个行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \lambda_r & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & \cdots & 2^{k_1-1}\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 & 2\lambda_r^2 & \cdots & 2^{k_r-1}\lambda_r^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{k_1-1}\lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & (k-1)\lambda_r^{k-1} & \cdots & (k-1)^{k_r-1}\lambda_r^{k-1} \end{vmatrix}$$

是一种推广的范达蒙行列式．它等于

$$\prod_{i=1}^{r} K_i!\lambda_i^{\frac{k_i(k_i-1)}{2}} \cdot \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)^{k_i k_j}.$$

由于$\lambda_i \neq 1$, $\lambda_j \neq \lambda_i (j > i)$对任何特征根成立，所以这个行列式确实不等于零．也就是说，我们一定可以由方程组(II.8)得到一组确定的常数C_{il}．再结合定理3证明过程的后半部分，也就得出了公式(3.11)的另一种证明．

附录 III 常系数线性齐次常差分方程组

从第九节的定义中可知，常系数线性齐次常差分方程组的一般形式是

$$\begin{cases} f_1(n+1)=a_{11}f_1(n)+a_{12}f_2(n)+\cdots+a_{1m}f_m(n), \\ f_2(n+1)=a_{21}f_1(n)+a_{22}f_2(n)+\cdots+a_{2m}f_m(n), \\ \quad\cdots\cdots \\ f_m(n+1)=a_{m1}f_1(n)+a_{m2}f_2(n)+\cdots+a_{mm}f_m(n), \end{cases} \tag{III.1}$$

其中 $a_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant m)$为常数．它的初始条件一般是

$$f_1(1)=c_1,\ f_2(1)=c_2,\ \cdots,\ f_m(1)=c_m. \tag{III.2}$$

方程组(III.1)的解法与常系数线性齐次常微分方程组的解法十分相似．学过常微分方程的读者完全可以自己推导出来。

为了推导上的方便，我们令

$$F(n)=\begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_m(n) \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \tag{III.3}$$

于是，方程组(III.1)可以简单地记作

$$F(n+1)=AF(n), \tag{III.4}$$

而初始条件(III.2)可以写成

$$F(1)=C. \tag{III.5}$$

现在我们来对函数 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 做线性变换:

$$\begin{cases} g_1=p_{11}f_1+p_{12}f_2+\cdots+p_{1m}f_m, \\ g_2=p_{21}f_1+p_{22}f_2+\cdots+p_{2m}f_m, \\ \cdots\cdots \\ g_m=p_{m1}f_1+p_{m2}f_2+\cdots+p_{mm}f_m, \end{cases} \tag{III.6}$$

其中 $p_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant m)$ 为常数. 设

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix},$$

$$G(n)=\begin{pmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_m(n) \end{pmatrix}, \tag{III.7}$$

则(III.6)可以简记为

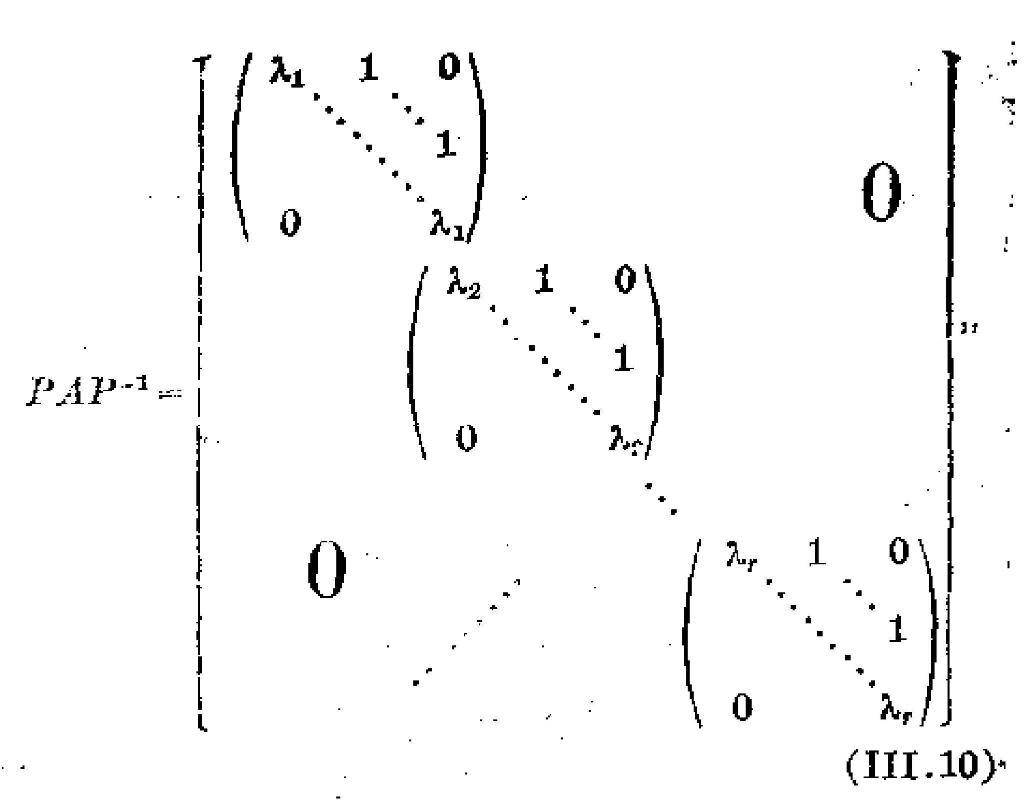
$$G=PF. \tag{III.8}$$

我们要求(III.6)是可逆的, 也就是说, 由(III.6)可以唯一地解出 $f_1, f_2, \cdots, f_m$. 这等价于 P 是可逆阵. 将 $F=P^{-1}G$ 代入(III.4), 得

$$G(n+1)=PAP^{-1}G(n). \tag{III.9}$$

(III.9) 仍是线性齐次方程组, 但它的系数矩阵已经变成 PAP^{-1} 了. 我们来求 (III.1) 的所有复值函数解.

取适当的 P 使 PAP^{-1} 为若当法型, 具体地说就是



$$(III.10)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为 A 的特征根．这样，方程组(III.9)就按照(III.10)中的若当块分解成若干个简单的方程组．例如，若第一个若当块是 k 行的，则有

$$\begin{cases} g_1(n+1)=\lambda_1 g_1(n)+g_2(n), \\ g_2(n+1)=\lambda_1 g_2(n)+g_3(n), \\ \cdots\cdots \\ g_{k-1}(n+1)=\lambda_1 g_{k-1}(n)+g_k(n), \\ g_k(n+1)=\lambda_1 g_k(n). \end{cases} \quad (III.11)$$

这个方程组很容易解．由最后一个方程可以得到

$$g_k(n)=b\lambda_1^n, \ (b \text{ 为常数})$$

代入第 $k-1$ 个方程不难解得 $g_{k-1}(n)$ 等等．如此作下去，可解出所有 $g_i(n)(1\leqslant i\leqslant k)$．再对(III.10)的每一个若当块解一个类似于(III.11)的方程组，我们就得到了(III.9)的通解．其中每个 $g_i(n)$ 都是形如

$$h(n)\lambda_i^n \tag{III.12}$$

的函数，h 是多项式. 注意到(III.11)的解法，就可以看出 h 的次数应小于相应的若当块的行数，因而它也应该小于相应特征根的重数.

现在，我们将 $G(n)$ 的通解代入 $F=P^{-1}G$，即得(III.1)的通解. 由上所述可知，通解具有形式

$$f(n)=\sum_{j=1}^{s} h_{ij}(n)\lambda_j^n, \quad (0\leqslant i\leqslant m) \tag{III.13}$$

其中 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 为 A 的互不相同的特征根；h_{ij} 为多项式，它的次数小于 A 的特征根 λ_j 的重数.

对于给定的初始条件(III.2)，我们可以这样来确定(III.1)的特解：由(III.2)和(III.1)算出 $f_i(1)$, $f_i(2)$, $\cdots$, $f_i(m)$，代入(III.13). 注意(III.13)中的所有多项式 h_{ij} 至多共有 m 个系数，因而由第三节的有关内容可知，$f_i(1)$, $f_i(2)$, $\cdots$, $f_i(m)$ 一定可以唯一确定所有这些系数，这也就确定了每一个 $f_i(n)$.（注意，我们知道(III.1)在初始条件(III.2)下的解一定存在.）

如果 $a_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant m)$ 都是实数，按上面的方法得出的解 f_1, f_2, $\cdots$, f_m 当然都应是实值函数. 但在它们的表达式中却有可能出现虚数. 这时我们如果像第三节中那样，就可以将它们化成指数式与三角函数的表达式，从而使解中不出现虚数.

【例】 设 A 是实对称阵，则(III.1)的通解(III.13)中的 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 都是实数，而 h_{ij} 都是实常数. 这是因为 A 的若当法型是实对角阵.

参 考 文 献

[1] 华罗庚：数学归纳法．

[2] 常庚哲、伍润生：复数与几何．

[3] 李克正：代数基本定理的一个初等证明，《数学通报》1979年第4期．

[4] 盖尔芳德：有限差计算．

[5] 常庚哲：抽屉原则及其他．

[6] 华罗庚：数论导引．

[7] 常庚哲、程龙、单墫：第22届国际中学生数学竞赛试题解答，《数学通报》1982年第2期．

[8] 华罗庚：从杨辉三角谈起．

[9] 单墫：组合数学的问题与方法．

[10] 夏道行：π和e．

[11] 胡祖炽：计算方法．

[12] 史济怀：平均．

[13] 王竹溪、郭敦仁：特殊函数概论．

[14] 复旦大学数学系编：概率论与数理统计．

[15] 段学复：对称．

[16] 田增伦：函数方程．

习题解答与提示

习题一解答

1. (1) 3 阶; (2) 2 阶; (3) 2 阶; (4) 1 阶; (5) 1 阶; (6) k 阶.

2. (1) 有(1)、(3)、(6)三个; (2) 有(1)、(2)、(6)三个; (3)有(1)、(6) 两个; (4) 有 (4)、(5) 两个.

4. $x_n=\sqrt{3^n+1}$.

习题二解答

1. (1) $\frac{1}{5}[3^n-(-2)^n]$;　　(2) $2^n+(1-\sqrt{3})^n+(1+\sqrt{3})^n$;

(3) $2^n(2-3n+n^2)$;　　(4) $2^{\frac{n+1}{2}}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}$.

2. (1) $\frac{1}{4}+\frac{n}{2}+\frac{1}{4}(-1)^{n+1}$;

(2) $\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别构成一个满足方程(3.9) 的数列.

3. (2) 满足. (提示: 参看附录 I.)

4. (1) $f(n)=f(n-1)+3f(n-2)-3f(n-3)$;

(2) $f(n)=30f(n-1)-280f(n-2)+960f(n-3)$
$-1024f(n-4)$;

(3) $f(n)=(3+\sqrt{2})f(n-1)-(4+3\sqrt{2})f(n-2)$
$+(4+3\sqrt{2})f(n-3)-(3+\sqrt{2})f(n-4)$
$+f(n-5)$.

5. $T(n)=n^2-n$.

6. 当 $-3<a<1$ 时,

$$x_n=c_1\cos\frac{2n\pi}{3}+c_2\sin\frac{2n\pi}{3}+c_3\cos n\theta+c_4\sin n\theta,$$

其中θ满足$\cos\theta=\frac{a+1}{2}$;

当$a=-3$或1时,

$$x_n=c_1\cos\frac{2n\pi}{3}+c_2\sin\frac{2n\pi}{3}+\left(\frac{a+1}{2}\right)^n(c_3+c_4n);$$

当 $a<-3$ 或 $a>1$ 时，

$$x_n=c_1\cos\frac{2n\pi}{3}+c_2\sin\frac{2n\pi}{3}+c_3\lambda^n+c_4\lambda^{-n},$$

其中 $\lambda=\dfrac{a+1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$.

7. (2) $a_n+\lambda pa_{n-1}+\lambda^2qa_{n-2}=0$.

习题三解答

1. (2) $(-1)^n(n-1)+\dfrac{\sin n\alpha}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

2. (1) $\lg(n5^{n-1})$;　　(2) $\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{n\pi}{2}+\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

3. (2) $a_n=1-\dfrac{1}{n}$.

5. (2) $|\Delta^{2k-1}f(n)|=\left|\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^{2k-1}\cos\left(n+k-\dfrac{1}{2}\right)x\right|$,

$$|\Delta^{2k}f(n)|=\left|\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2k}\sin(n+k)x\right|.$$

7. (1) $\dfrac{1}{3}(4^{n-1}-1)$;　　(2) $2n^2+n-1$;

(3) $(3n+1)(-2)^n-n+2$;

(4) $\dfrac{4}{27}(-1)^n+2^n\left(\dfrac{n^2}{3}-\dfrac{n}{9}-\dfrac{4}{27}\right)$;

(5) $\dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}+\dfrac{\cos n\alpha+\cos(n-1)\alpha}{2+2\cos\alpha}$.

8. 20年.

9. 甲种工人待遇高些.

10. $N(2^m)=1+2^m(m-1)$.

习题四解答

1. (1) $\dfrac{4}{3}n-\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{2n\pi}{3}-\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$;

(2) $\dfrac{1}{3}\left(n+1-\cos\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right)$;

(3) $\dfrac{1}{8}\left[6n+3+(-1)^{n+1}-2\sin\dfrac{n\pi}{2}-2\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]$;

(4) $\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\cos\frac{2ln\pi}{k}$. (提示：考虑 a_n 与 $\sum_{l=0}^{k-1}\left(\cos\frac{2ln\pi}{k}+i\sin\frac{2ln\pi}{k}\right)$的关系.)

3. 提示：可以用差分方程的通解证明，也可以证明$\{a_n\}$满足一个形如(5.4)的方程.

5. 提示：先证明$\{a_n\}$是周期的.

6. $\left(\frac{6}{5}, \frac{30}{19}\right)$.

7. 提示：先求得 $a_n=(2a_0-a_1)+(a_1-a_0)\cdot 2^n$，注意应用 $a_1-a_0\geqslant 1$ 和 $a_0\geqslant 1$，便可证得 $a_{100}\geqslant 2^{100}$.

8. $b_{n+1}+(2q-p^2)b_n+q^2b_{n-1}=0$.

11. 提示：证明 a_n 满足方程 $a_{n+1}=2a_n+3$ 及初始条件 $a_0=1$.

12. (1) 18; (2) $\frac{\alpha k+m\beta+k\beta}{m+2k}$; (3) $\frac{74}{17}$.

习题五解答

2. $a_n=2^n-1$, $S_n=2^{n+1}-n-2$.

3. $\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

4. $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n+1}$.

5. $P(x)=x+3$, $Q(x)=-x-2$.

6. (1) $\frac{1}{2r(r+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$;

(2) $(n+1)!-r!$; (3) $\frac{1}{(r+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$;

(4) $\frac{m}{m-1}\left(\frac{1}{C_{m+r-1}^{m-1}}-\frac{1}{C_{m+n}^{m-1}}\right)$;

(5) $\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}-\frac{2}{1-x^2}$; (6) $\frac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{\sin x}$.

8. (1) $\frac{1}{5}n^5+\frac{3}{4}n^4+\frac{5}{6}n^3+\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{30}n$;

(2) $2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$; (3) $3^n\left(n-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$;

(4) $\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n$.

11. $\frac{3}{8}\left[1+\frac{(2n+1)\cos n\alpha-(2n-1)\cos(n+1)\alpha-2}{1-\cos\alpha}\right]$

$-\frac{(-1)^n[\cos(n+1)\alpha+\cos n\alpha]-\cos\alpha-1}{8(1+\cos\alpha)}$.

12. $\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha}{2-2\cos\alpha}-\frac{1}{2}$;

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\alpha+\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha}{2-2\cos\alpha}.$$

13. $f(n)=2^{n-2}(n^2+n)$.

15. (1) $2n\cdot5^{n-1}$; (2) 当 $n=1$ 时为 -1; 当 $n>1$ 时为 0;

(3) $(-1)^m C_{n-1}^m$;　　(4) $\frac{1}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$.

习题六解答

4. (2) $1-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$.

5. $a_n=\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$.

7. 提示:验证$\{F_n\}$满足所给的方程及初始条件，再根据第二节有关定理得到结论.

9. 提示:应用数学归纳法.

11. 提示:只需证明$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}F_{2k-1}\right|$是平方数.

12. $a_n=F_{n+1}$.

14. 4, 6, 7, 9.

15. (1) 在有序数对(a_{n-2}, a_{n-1})中, a_{n-1}, a_{n-2}都只能取从0到9这十个数字之一，所以这样的数对取值方法仅有100种. 根据抽屉原则，在从(a_1, a_2)到(a_{101}, a_{102})的101个数对中，必存在两个数对(a_k, a_{k+1})和(a_{k+l}, a_{k+l+1})取值相同. 即

$$a_k=a_{k+l},\ a_{k+1}=a_{k+l+1}.$$

从而有$a_{k+2}=a_{k+l+2}$, $a_{k+3}=a_{k+l+3}$, …这样,有

$$a_{k+j}=a_{k+l+j}(j=0, 1, \cdots)$$

说明A从小数点之后第k位起是循环的. 因此A是有理数.

(2) 设A的循环节长m,则存在自然数k,使

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}(j=0,\ 1,\ \cdots)$$

由于 $a_k=a_{k+m}$, $a_{k+1}=a_{k+m+1}$, 则 a_{k-1}与 a_{k+m-1}, a_{k-2} 与 a_{k+m-2}, …都应相等. 如此逆推, 直至 $a_1=a_{m+1}$, 可见 A 从小数点之后的首位就进入循环了. 于是我们只需找到满足

$$a_{m+2}=a_{m+1}=a_2=a_1=1$$

的最小正整数 m. 而 a_n 就是 F_n 个位上的数. 于是 F_m 个位上只能是 0, 根据本节有关内容, 有 $m=15k$(k 是正整数). 为找出满足 F_{15k+1} 个位上是 1 的最小正整数 k, 我们对方程(7.1)中的变量 k 取特定的值 15, 便有

$$F_{n+15}=F_{15}F_{n-1}+F_{16}F_n=610F_{n-1}+987F_n,$$

则 a_{n+15} 就等于 $7a_n$ 个位上的数. 令 $n=1,\ 16,\ 31,\ 46,\ 61$, 可得出 $a_{16}=7$, $a_{31}=9$, $a_{46}=3$, $a_{61}=1$, 于是有 $m=60$. 也就是说, A 的循环节长 60.

(3) $A=0.\dot{2}68\dot{4}=\dfrac{244}{909}$.

16. 由$(n^2-mn-m^2)^2=1$, 得 $n^2-mn-m^2=\pm1$. 即

$$(n+m)(n-m)=mn\pm1\geqslant0.$$

且仅当 $m=n=1$ 时等号成立.

又$[m^2-(n-m)m-(n-m)^2]^2=(n^2-mn-m^2)^2=1$, 说明若$(m,n)$是满足等式的一对整数时, $(n-m,\ m)$也是满足等式的整数对. 反之亦然. 而满足等式的最小一对整数为$(1,\ 1)$, 将它们看作$(n-m,\ m)$, 则$(m,\ n)$就是$(1,\ 2)$. 用这样的方法还可以继续求出$(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, …它们都满足等式. 一般地, 设$(a_{n-2},\ a_{n-1})$是满足等式的数对, 我们将它看作$(n-m,\ m)$, 则由于 $n=m+(n-m)$, $(a_{n-1},\ a_{n-2}+a_{n-1})$ 也是满足等式的一个数对. 这就是说, 可以用

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1},\ a_1=a_2=1$$

来确定 a_n 的值. 因此, 满足等式的 m, n 是斐波那契数列的两相邻项 F_{n-1}, F_n.

在不超过 1981 的自然数中, $\{F_n\}$中最大的一项为 $F_{17}=1597$, 其次为 $F_{16}=987$, 故 m^2+n^2 的最大值为

$$F_{17}^2+F_{16}^2=3524578.$$

17. 设此人到达第 n 级有 a_n 种上法. 这 a_n 种上法中有 a_{n-1} 种是

从第 $n-1$ 级迈上一级到达的，还有 a_{n-2} 种是从第 $n-2$ 级迈上两级到达的。这就是说

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

另外，迈上第 1 级和第 2 级分别有 1 种和 2 种上法，即 $a_1=1, a_2=2$. 所以共有 $a_{20}=F_{21}=10946$ 种上法。

18. 20365011074。

习题七解答

1. (1) $\frac{1}{8}\cdot 3^{n^2}(3^{2n+3}-19)$；　　(2) $\frac{2}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 2^n$；

(3) $\frac{\sin\alpha\sin n\alpha}{1-\sin\alpha}\left(\frac{1}{\sin^{n-1}\alpha}-1\right)$；

(4) $P_{n+m+1}^{n+1}\left(\frac{2}{m+1}-\frac{1}{m+n+1}\right)$.

2. (1) $\frac{(-3)^{n-1}-1}{(-3)^{n-1}+1}$；　　(2) $\frac{4-4n}{2n+3}$；

(3) $$\frac{(12-\sqrt{3}\,i)\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)}{(1+4\sqrt{3}\,i)\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-7}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4. 差分方程 $a_{n+1}=(a+d)a_n+(bc-ad)a_{n-1}$ 的特征多项式为

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc).$$

由于满足差分方程的任何数列 $\{a_n\}$ 都是周期的，它的特征根只能是绝对值为 1 的单根。因此，只可能有以下两种情况：

(1) 特征多项式有两实根 1 和 -1. 此时 $a+d=0$, $bc-ad=1$；

(2) 特征多项式根的判别式 $\Delta=(a+d)^2+4(bc-ad)<0$，有两共轭虚根 $\cos\frac{k\pi}{m}\pm i\sin\frac{k\pi}{m}$ (m, k 为正整数且 $m\nmid k$)。此时

$$a+d=2\cos\frac{k\pi}{m},\ \sqrt{-\Delta}=2\sin\frac{k\pi}{m}.$$

又，方程(8.7)的解 x_n 满足 $\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}=\left(\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}\right)^n\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}$，其中 λ_1, λ_2 是方程 $c\lambda^2+(d-a)\lambda-b=0$ 的两根。此一元二次方程根的判别式为 $(a-d)^2+4bc=(a+d)^2+4(bc-ad)=\Delta$. 所以在第 (1) 种情况下，$\Delta=4$, $\lambda_{1,2}=\frac{a-d\pm 2}{2c}$. 于是

$$\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}=\frac{a-\dfrac{a-d+2}{2}}{a-\dfrac{a-d-2}{2}}=\frac{a+d-2}{a+d+2}=-1,$$

则 $\dfrac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}=(-1)^n\dfrac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}$. 说明$\left\{\dfrac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}\right\}$是周期为 2 的数列. 但 x_n 被 $\dfrac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}$ 唯一确定,所以$\{x_n\}$也是周期的.

在第(2)种情况下,$\lambda_{1,2}=\dfrac{a-d\pm 2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}{2c}$. 于是

$$\frac{a-c\lambda_1}{a-c\lambda_2}=\frac{a-\dfrac{a-d+2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}{2}}{a-\dfrac{a-d-2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}{2}}=\frac{a+d-2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}{a+d+2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{k\pi}{m}-2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}{2\cos\dfrac{k\pi}{m}+2i\sin\dfrac{k\pi}{m}}=\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

所以,

$$\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_1}=\left(\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)^n\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}$$
$$=\left(\cos\frac{2kn\pi}{m}-i\sin\frac{2kn\pi}{m}\right)\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2},$$

同样说明$\left(\dfrac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}\right)$是周期的,因而$\{x_n\}$也是周期的.

6. (1) $3^{\frac{6^n-1}{5}}$;

(2) $\operatorname{tg}\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}$(提示:令 $a_n=\operatorname{tg}\varphi_n$, $\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$);

(3) $\sqrt{2^{2n-1}-1}$;　　　(4) $(3+2\sqrt{2})^{3^n}+(3-2\sqrt{2})^{3^n}$;

(5) $\dfrac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}]$(提示:令 $y_n=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{2x_n}$).

7. (1) $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, θ 是区间$[0,\pi]$上满足 $\cos\theta=a$的角.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

8. $1+2^n(n-1)$.

10. (1) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}-2^n$; (2) $2\cdot n!-1$; (3) $2^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}$(提示：令 $b_{n+1}b_n=a_n$)；

(5) $n!+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}P_n^{n-k}$(提示：令 $a_n-na_{n-1}=b_{n-1}$)；

(6) $1-\frac{1}{n}$.

11. 设 $a_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$，其中 c_1, c_2 为常数，λ_1, λ_2 满足$\lambda_1+\lambda_2=-p$，$\lambda_1\lambda_2=q$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}a_{n-1}&=(c_1\lambda_1^{n+1}+c_2\lambda_2^{n+1})(c_1\lambda_1^{n-1}+c_2\lambda_2^{n-1})\\
&=c_1^2\lambda_1^{2n}+c_2^2\lambda_2^{2n}+c_1c_2\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{n-1}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\\
&=(c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n)^2-2c_1c_2\lambda_1^n\lambda_2^n+c_1c_2\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{n-1}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\\
&=a_n^2+c_1c_2(\lambda_1\lambda_2)^n\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2\right)\\
&=a_n^2+c_1c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2\right)q^n.
\end{aligned}
$$

令 $c_1c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2\right)q=c$，即有 $a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+cq^{n-1}$. 于是

$$
\begin{aligned}
&a_{n+1}^2+pa_{n+1}a_n+qa_n^2+cq^n\\
=&a_{n+1}^2+pa_{n+1}a_n+qa_{n+1}a_{n-1}+qa_n^2-cq^n-qa_{n+1}a_{n-1}\\
=&a_{n+1}(a_{n+1}+pa_n+qa_{n-1})-q(a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2-cq^{n-1})=0.
\end{aligned}
$$

12 $\sqrt{21}$.

13. $\alpha\cdot\dfrac{\cos\frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}+i\sin\frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}+1}{\cos\frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}+i\sin\frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}-1}$，$k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}-2$，

α 是 a 的平方根.

14. 由于 $a_n(j+1)+1=[a_n(j)+1]^2$，所以

$$a_n(j)=[a_n(0)+1]^{2^j}-1=\left(1+\frac{d}{2^n}\right)^{2^j}-1,$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}a_n(n)&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{d}{2^n}\right)^{2^n}-1\right]\\
&=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{d}{m}\right)^m-1\right]=e^d-1.
\end{aligned}
$$

15. $x=\dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{r}}\right)\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\left(\sqrt[n]{r}-\dfrac{1}{\sqrt[n]{r}}\right)\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}}$,

$k=0, 1, \cdots, n-1$, 其中 r, θ 满足$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=a$.

16. 先求出 $p_n(x)=\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n$.

令 $z_n=\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n$, 则由 $p_n(x)=a$, 可写出 $z_n+z_n^{-1}=a$. 设此方程的一个根为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则另一个根就是 $\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$. 这里的 r, θ 满足 $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=a$. 于是

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

$$\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{1}{\sqrt[n]{r}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}-i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

因此, 有 $x=\left(\sqrt[n]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{r}}\right)\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\left(\sqrt[n]{r}-\dfrac{1}{\sqrt[n]{r}}\right)\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,

$k=0, 1, \cdots, n-1$.

当 $r\neq1$ 或 $\theta\neq m\pi$(m 是整数)时, 方程 $P_n(x)=a$ 对 $n\geq1$ 无重根. 而若 $r=1$ 且 $\theta=m\pi$, 则有 $a=\pm2$. 也就是说, 当 $a\neq\pm2$ 时, $P_n(x)=a$ 有 n 个互不相同的根.

当 $a=2$ 或 -2 时, $P_n(x)=a$ 均有重根.

习题八解答

1. (1) $\begin{cases} x_n=\dfrac{4}{3}\cdot5^{n-1}+\dfrac{1}{3}(-1)^n, \\ y_n=\dfrac{2}{3}\cdot5^{n-1}+\dfrac{1}{3}(-1)^{n-1}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_n=(2-n)3^{n-1}, \\ y_n=(n+1)3^{n-1}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_n=\sqrt{3}\sin\dfrac{(n+2)\pi}{3}+\cos\dfrac{(n+2)\pi}{3}, \\ y_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{(n+2)\pi}{3}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(-1)^n, \\ y_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^n-\dfrac{1}{2}, \\ z_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^n+\dfrac{1}{2}(-1)^n. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n-1}-\dfrac{4}{3}\cdot 5^{n-1}+1, \\ b_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n+\dfrac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_n=\dfrac{7}{9}-2n+\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{7}{9}\right)4^n, \\ b_n=\dfrac{1}{9}+n+\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{9}\right)4^n. \end{cases}$

3. (1) $\dfrac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n]$; (2) $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

4. 提示：第一种方法，分别令 $a_n=C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots$，$b_n=C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots$. 再证明 $a_n^2+b_n^2=2(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2)$ 及 $a_1+b_1=2$.

第二种方法，证明等式的左边等于 $(1+i)^n(1-i)^n$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-)^k\sin k\alpha=\dfrac{(-1)^n[\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha]-\sin\alpha}{2+2\cos\alpha}$,

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos k\alpha=\dfrac{1+\cos\alpha+(-1)^n[\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha]}{2+2\cos\alpha}$.

6. (1) 先求出 $\begin{cases} f_{n+1}(x, y)=(x^2-y^2)f_{n-1}(x, y), \\ g_{n+1}(x, y)=(x^2-y^2)g_{n-1}(x, y), \end{cases}$

再根据 $\begin{cases} f_0(x, y)=1, \\ g_0(x, y)=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} f_1(x, y)=x, \\ g_1(x, y)=y, \end{cases}$

便可求得

$$\begin{cases} f_n(x, y)=\dfrac{1}{2}[x+\sqrt{x^2-y^2}+(-1)^{n-1}\cdot \\ \qquad (x-\sqrt{x^2-y^2})](\sqrt{x^2-y^2})^{n-1}, \\ g_n(x, y)=\dfrac{y}{2}[1-(-1)^n](\sqrt{x^2-y^2})^{n-1}; \end{cases}$$

(2) 当 $n=1$ 时，$f_1(x, y)=g_1(x, y)=1$ 有实数解 $x=y=1$；当 $n=0$ 或 $n>1$ 时，无实数解.

7. (2) 四个数列有相同的极限 $\frac{a+b+c+d}{4}$.

9. (1) $f(m, n)=\frac{n}{m}$(提示：令 $f(m, n)=g(m, n)-\frac{m-n}{m}$，可解得 $g(m, n)=1$)；

(2) $f(m, n)=(-1)^m\cdot 2^n$(提示：用列表法).

10. (1) $f(m, n)=\begin{cases}(-1)^n C_{m-1}^n, & (m>n>0)\\ 0. & (n\geqslant m>0)\end{cases}$

11. 根据所给出的条件列表：

x \ y	0	1	2	3	…	n	…
0	1	2	3	4	…	$n+1$	…
1	2	3	4	5	…	$n+2$	…
2	3	5	7	9	…	$2n+3$	…
3	5	13	29	61	…	$2^{n+3}-3$	…
4	13	$2^{16}-3$	$2^{2^{16}}-3$	$2^{2^{2^{16}}}-3$	…	…	…

表中除首行(即 $x=0$)可按 $f(0, y)=y+1$ 直接写出外，以下各行按下列方法写出：

(a) 每列第一个元素(即 $y=0$)与它右上方的元素相等；

(b) 每列从第二个元素起，各元素的值都是它左邻元素代入上一行公式(第 $n+1$ 列)计算的结果；

(c) 各行公式是这样求的：

首行直接写出. 再由 $f(1, n)=f[0, f(1, n-1)]=f(1, n-1)+1$，可求出 $f(1, n)=n+2$.

对于第三行 $(x=2)$，有 $f(2, n)=f[1, f(2, n-1)]=f(2, n-1)+2$. 而 $f(2, 0)=3$，所以 $f(2, n)=2n+3$.

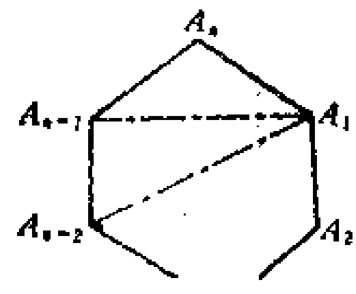
对于第四行，有 $f(3, n)=f[2, f(3, n-1)]=2f(3, n-1)+3$，及 $f(3, 0)=5$，又有 $f(3, n)=2^{n+3}-3$.

最后，$f(4,n)=f[3,f(4,n-1)]=2^{f(4,n-1)+3}-3$，及 $f(4,0)=13$，按这个式子，有 $f(4,1)=2^{16}-3$，$f(4,2)=2^{2^{16}}-3$，…，这样，

$$f(4,1981)=\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}}^{1981\text{个}2}-3=\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}^{1989\text{个}2}-3.$$

12. C_{n-m+1}^{m}（提示：选法的种数 $f(m,n)$ 满足偏差分方程 $f(m,n)=f(m,n-1)+f(m-1,n-2)$ 及初始条件 $f(1,n)=n$，$f(m,1)=f(m,2)=0$，$n\geqslant1$，$m>1$）。

13. 将凸 n 边形顶点记作 A_1，A_2，…，A_n，并设满足条件的不同涂法共有 $f(n,m)$ 种。



（第 13 题图）

我们先将边 A_1A_2，…，$A_{n-1}A_n$ 涂上颜色，再按 A_nA_1 的涂色情况分成两类：(1) A_1A_2 与 $A_{n-1}A_n$ 颜色不同。我们将 $A_{n-1}A_1$ 用 $A_{n-1}A_n$ 的颜色连上，则凸 $n-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 也满足所给的条件，因此这个 $n-1$ 边形共有 $f(n-1,m)$ 种涂法。而此时 A_nA_1 只能涂剩下的 $m-2$ 种颜色之一，因而这类情况下涂法共有 $(m-2)f(n-1,m)$ 种。

(2) A_1A_2 与 $A_{n-1}A_n$ 颜色相同，则 $A_{n-2}A_{n-1}$ 与 A_1A_2 颜色不同。我们若把 A_{n-2} 与 A_1 用 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的颜色连上，凸 $n-2$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-2}$ 有 $f(n-2,m)$ 种涂法。而此时 A_nA_1 可以涂剩下的 $m-1$ 种颜色之一。因此这类情况下涂法共有 $(m-1)f(n-2,m)$ 种。于是有

$$f(n,m)=(m-2)f(n-1,m)+(m-1)f(n-2,m).$$

我们将它看作一个关于 n 的常差分方程，则由于它的特征根为 -1 和 $m-1$，可以设 $f(n,m)=c_1(-1)^n+c_2(m-1)^n$。

当 $n=3$ 时，三角形应有 P_m^3 种涂法；当 $n=4$ 时，四边形的涂法中有 P_m^4 种各边颜色均不相同，有 $12C_m^3$ 种使用三种颜色的涂法，还有 $2C_m^2$ 种只用两种颜色的涂法，因此共有 $P_m^4+12C_m^3+2C_m^2$ 种涂法。由

$$\begin{cases}-c_1+(m-1)^3c_2=P_m^3,\\ c_1+(m-1)^4c_2=P_m^4+12C_m^3+2C_m^2,\end{cases}$$

可解得 $c_1=m-1$，$c_2=1$。所以有 $f(n,m)=(m-1)(-1)^n+(m-1)^n$。

种不同的涂法.

14. (1) C_{m+n-1}^{m}(提示:这个问题与本节的"取球"问题是相同的问题); (2) C_{n+m}^{m}.

习题九解答

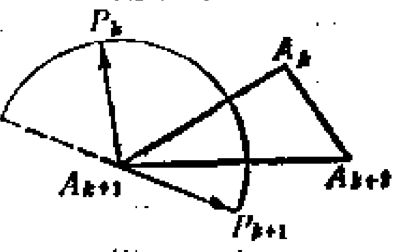
1. $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (提示:满足方程 $a_{n+1}=a_n+n-1$ 及 $a_3=0$).

2. n^2-n+2 (提示:满足方程 $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$及 $a_1=2$).

3. $2ah$.

4. 将 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面看作任意给定的一个复平面.

令 $\eta=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$,并将各点对应的复数用同一个字母表示.则有 $P_{k+1}-A_{k+1}=-\eta^4(P_k-A_{k+1})=\eta(A_{k+1}-P_k)$,故



(第4题图)

$$P_1=(1+\eta)A_1-\eta P_0, \quad ①$$

$$P_2=(1+\eta)A_2-\eta P_1, \quad ②$$

$$P_3=(1+\eta)A_3-\eta P_2. \quad ③$$

①$\times\eta^2$-②$\times\eta$+③, 得 $P_3=P_0+(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)$. 又由于 $A_s=A_{s-3}(s\geqslant4)$, 由归纳法得 $P_{3k}=P_0+k(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)$,

因此, $P_{1986}=P_0+662(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)$. 若 P_{1986} 与 P_0 重合,则$(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)=0$. 但$1+\eta\neq0$,所以 $\eta^2A_1-\eta A_2+A_3=0$. 而 $\eta^2=\eta-1$,又有 $\eta(A_2-A_1)=A_3-A_1$,即 A_3 是 A_2 绕 A_1 反时针旋转 $60°$ 后的点,因而 $\triangle A_1A_2A_3$ 是等边三角形.

6. 设 $a_n=(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$,则 a_n 满足 $a_n=10a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_1=10$, $a_2=102$,因此 a_n 是正整数$(n\geqslant1)$.

因为$0<\sqrt{26}-5<0.1$,所以$-10^{-n}<(5-\sqrt{26})^n<10^{-n}$. 这说明当 n 为奇数时,$(5+\sqrt{26})^n$ 的小数部分是$(\sqrt{26}-5)^n$; n 为偶数时, $(5+\sqrt{26})^n$ 的小数部分是 $1-(\sqrt{26}-5)^n$. 前一种情况下小数点之后至少有 n 个 0;后一种情况下小数点之后至少有 n 个 9.

7. 设 $r'=k+\dfrac{1}{2}-\sqrt{k^2+\dfrac{1}{4}}$,则 r 与 r' 是方程

$$x^2-(2k+1)x+k=0$$

的两根．设 $a_n=r^n+r'^n$，则 a_n 满足差分方程 $a_n=(2k+1)a_{n-1}-ka_{n-2}$，且 $a_1=2k+1$，$a_2=4k^2+2k+1$，可见 a_n 对任何自然数 n 是整数．

由于 $r'\cdot r=k$，且 $r>k$，所以 $0<r'<1$，从而有 $0<r'^n<1$，而 $r^n+r'^n$ 为整数，说明 $[r^n]=a_n-1$．

因为 a_1-1 和 a_2-1 都能被 k 整除，$a_n=k(2a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-1}-1)+1$，所以由数学归纳法可知 $k|a_n-1$，即 $k|[r^n]$．

8．提示：证明 $2^{n+1}-7a_{n-1}^2=b_{n-1}^2$，其中 b_{n-1} 满足方程 $b_n=-b_{n-1}-2b_{n-2}$，$b_1=-1$，$b_2=-3$．

9．先证 $\frac{1}{4}(r^{2n}+r^{-2n}-2)$ 是正整数．

$$\begin{aligned}r^{2n}+r^{-2n}&=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{2n}+(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{2n}\\&=(2a+1+2\sqrt{a^2+a})^n+(2a+1-2\sqrt{a^2+a})^n.\end{aligned}$$

将 $2a+1+2\sqrt{a^2+a}$ 和 $2a+1-2\sqrt{a^2+a}$ 看作特征根，可作出差分方程

$$x_n=(4a+2)x_{n-1}-x_{n-2}$$

及 $x_1=4a+2$，$x_2=16a^2+16a+2$．它的解就是 $x_n=r^{2n}+r'^{2n}$．

用数学归纳法不难证明 $4|x_n-2$，且 $x_n>2$．再令 $a_n=\frac{1}{4}(x_n-2)$，便可得出结论．

10．提示：$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}5^k=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n]$．

11．(1) 首先证明，数列 $\{T_n\}$ 满足 $\prod_{k=1}^{n}T_k=T_{n+1}-1$．这可以用数学归纳法完成（过程略）．于是，$T_1$，$T_2$，…，$T_n$ 都能被 $T_{n+1}-1$ 整除，因而与 T_{n+1} 互质．说明任意两项 T_m，T_n 互质；(2) 注意到

$$\frac{1}{T_k}=\frac{1}{T_k-1}-\frac{1}{T_{k+1}-1},$$

可得到 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=1-\frac{1}{T_{n+1}-1}$．

由 (1) 可知，$T_{n+1}-1=\prod_{k=1}^{n}T_k$．而 $T_k-T_{k-1}=T_k^2-2T_k+1=(T_k-1)^2>0$，所以 $T_k>T_{k-1}$．于是 $T_{n+1}-1\geqslant\prod_{k=1}^{n}T_1=2^n$．也就有

$$0<\frac{1}{T_{n+1}-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{T_{n+1}-1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_{n+1}-1}$$

$$=1.$$

12. 首先注意到存在 $u_3=1986$.

以下，我们对任意整数 x 定义 $\bar{x}$ 是 x 除以 1986 的余数，于是，由序列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 便可以写出另一个序列

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \cdots$$

并由此作出一列有序整数对 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\bar{u}_2, \bar{u}_3), \cdots, (\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}), \cdots$ 由于 $\bar{u}_k$ 的取值仅有有限个，所以 $(\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1})$ 的取值方法也只有有限种. 就是说，存在自然数 $i<j$，使 $(\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ 与 $(\bar{u}_j, \bar{u}_{j+1})$ 的取值相同.

又，$\bar{u}_{i-1}\equiv u_{i-1}=u_i^2-u_{i+1}\equiv\bar{u}_i^2-\bar{u}_{i+1}(\bmod 1986)$，同理还有 $\bar{u}_{j-1}\equiv\bar{u}_j^2-\bar{u}_{j+1}(\bmod 1986)$，所以 $\bar{u}_{j-1}=\bar{u}_{i-1}$. 依此逆推，就会得到 $\bar{u}_{j-2}=\bar{u}_{i-2}, \cdots, \bar{u}_{j-i+3}=\bar{u}_3$. 反过来，还有 $\bar{u}_{j-i+3}=\bar{u}_{2(j-i)+3}=\cdots=\bar{u}_{k(j-i)+3}=\cdots$，即所有形如 $u_{k(j-i)+3}$ 的项都与 u_3 关于 1986 同余，它们都能被 1986 整除.

13. $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$；$\{F_n\}$ 为斐波那契数列(提示：考虑这个连分数与第七节例 3 的关系).

14. $2\cdot\frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}}{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}$.

15. 命题 7.2 可以推广为：

设整数列 $\{a_n\}$ 满足差分方程

$$a_n+p_1a_{n-1}+\cdots+p_{k-1}a_{n-k+1}+p_ka_{n-k}=0,$$

其中 $p_1, \cdots, p_{k-1}$ 为整数，$p_k=\pm1$. 若 $a_0=0$，则对任意正整数 m，存在正整数 l，使得 $m|a_n$ 当且仅当 $l|n$；$\{a_n\}$ 中各项除以 m 所得的余数组成一个周期数列.

16. $x^2+y^2+z^2=-2\alpha$, $x^3+y^3+z^3=3\beta$, $x^4+y^4+z^4=2\alpha^2$, $x^5+y^5+z^5=-5\alpha\beta$, $x^6+y^6+z^6=3\beta^2-2\alpha^3$, $x^7+y^7+z^7=7\alpha^2\beta$.

19. $x=-3$, $y=-2$, $z=4$.

20. 由于 x_i 等于 0, 1 或 2，所以 $x_i^k(x_i-1)(x_i-2)=0$. 即 $x_i^{k+2}-3x_i^{k+1}+2x_i^k=0(k=1, 2, \cdots, m)$. 因此,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+2}-3\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}+2\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}=0,$$

即 $f_{k+2}-3f_{k+1}+2f_k=0$, $k=1, 2, \cdots$. 将它看作一个差分方程，则 $f_m=c_1 2^m+c_2$. 而 $c_1=\frac{1}{2}(f_2-f_1)$, $c_2=2f_1-f_2$, 便可以得到

$$f_m=2^{m-1}(f_2-f_1)+2f_1-f_2.$$

21. $x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k(x+y)^{n-2k}(xy)^k$.

22. $\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$.

23. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$

$$=\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)^2-\frac{2(x+y+z)}{xyz}.$$

25. 提示：设 $(3+2i)^n$ 的虚部为 a_n，则 a_n 满足差分方程 $a_{n+2}=6a_{n+1}-13a_n$ 及初始条件 $a_1=2$, $a_2=12$. 再用数学归纳法证明 $13\nmid a_n$ $(n\geqslant1)$.

26. 用反证法．假设 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{n}$ (m, n 互质)，则 $n>m>0$. 令

$$\zeta=\cos\alpha+i\sin\alpha=\frac{n+mi}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

我们来证明对任意正整数 k, ζ^k 的虚部不为零．这只需验证 $(n+mi)^k$ 虚部不为零即可．

首先我们说，m^2+n^2 必有奇质因数．当 m, n 中奇、偶数各有一个时，显然如此．而 m, n 都是奇数时，可以设 $m=2p-1$, $n=2q-1$ (p, q 为不相等的自然数)，则

$$m^2+n^2=2[2p(p-1)+2q(q-1)+1],$$

其中 $2p(p-1)+2q(q-1)+1$ 是大于 1 的奇数，它必有奇质因数，也就是 m^2+n^2 的质因数．于是，我们设 m^2+n^2 的一个奇质因数为 l，显然 $l\nmid 2n$.

设 $(n+mi)^k=a_k+b_ki$. 我们再用数学归纳法证明存在 c_k，使得 $a_k\equiv nc_k(\bmod l)$, $b_k\equiv mc_k(\bmod l)$.

当 $k=1$ 时，令 $c_1=1$，命题成立；

假设对于 k 命题成立，则 $b_{k+1}=ma_k+nb_k\equiv2mnc_k(\bmod l)$. 令 c_{k+1}

$=2nc_k$. 注意到 $l|m^2+n^2$, 则 $c_k(n^2-m^2)\equiv c_k\cdot 2n^2 \pmod{l}$. 这样, $a_{k+1}=na_k-mb_k\equiv(n^2-m^2)c_k\equiv 2n^2c_k=nc_{k+1}\pmod{l}$, 且 $b_{k+1}\equiv mC_{k+1}\pmod{l}$. 可见对任意自然数 k, 命题均成立.

由于 $l\nmid 2n$, 而从上述过程中可以得知, $C_k\equiv(2n)^{k-1}\pmod{l}$. 故 $l\nmid C_k$. 又 $l\nmid m$ 且 l 为质数, 所以 $l\nmid b_k$, 这就说明 $b_k\neq 0$. 也就是说 $\sin k\alpha\neq 0$ 对于任意自然数 k 成立. 这与 $\frac{\alpha}{\pi}$ 是有理数矛盾. 因此 $\operatorname{tg}\alpha$ 是无理数.

习题十解答

1. (11.8)应写成

$$
\begin{aligned}
&a_0=c_0,\\
&a_1+a_0d_1=c_1,\\
&\cdots\cdots\\
&a_k+a_{k-1}d_1+\cdots+a_0d_k=c_k,\\
&\cdots\cdots\\
&a_m+a_{m-1}d_1+\cdots+a_{m-k}d_k=c_m,\\
&a_{m+1}+a_md_1+\cdots+a_{m-k+1}d_k=0,\\
&\cdots\cdots\\
&a_{m+l}+a_{m+l-1}d_1+\cdots+a_{m+l-k}d_k=0,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

由此可以看出, $\{a_n\}$并非从第 k 项起便满足(11.9). 因此求 $P(x)$ 时, 应先将 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 化成一个多项式与一个真分式之和的形式.

2. (1) $\frac{x+x^2}{1-3x+3x^2-x^3}$; (2) $\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

3. (1) $\frac{1}{3x+3}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{3x-6}$;

(2) $\frac{\frac{1}{k}}{1-\varepsilon_0x}+\frac{\frac{1}{k}}{1-\varepsilon_1x}+\cdots+\frac{\frac{1}{k}}{1-\varepsilon_{k-1}x}$(其中 $\varepsilon_m=\cos\frac{2m\pi}{k}+i\sin\frac{2m\pi}{k}$, $m=0, 1, \cdots, k-1$).

4. (1) $\frac{1+4x+7x^2}{1+3x+3x^2+x^3}$;

(2) $\frac{1-x^2-2x^3-3x^4-\cdots-(k-2)x^{k-1}}{1-x-x^2-\cdots-x^k}$.

6. $b_{ik_i}=\prod_{s\neq i}\frac{1}{(1-\alpha_s\alpha_i^{-1})^{k_s}}$.

8. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 中有 l 个互不相同的数. 我们不妨设 $z_1, z_2, \cdots, z_l$ 互不相同. 于是

$$f(n)=c_1z_1^n+c_2z_2^n+\cdots+c_lz_l^n \tag{*}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 为非零常数. 用例 8 的方法, 不难证明$\{f(n)\}$是一个周期数列, 即存在 $d>0$ 使得 $f(n+d)=f(n)$ 对一切 n 成立. 于是 $\{f(n)\}$ 满足一个特征多项式为 x^d-1 的线性齐次差分方程. 因而 $f(n)$ 可表达为

$$f(n)=c_1'z_1'^n+c_2'z_2'^n+\cdots+c_d'z_d'^n, \tag{**}$$

其中 $z_k'=\cos\frac{2k\pi}{d}+i\sin\frac{2k\pi}{d}(1\leqslant k\leqslant d)$. 设 $g(x)$ 为 $\prod_{k=1}^{l}(x-z_k)$ 和 x^d-1 的最小公倍式. 则 $\{f(n)\}$ 当然满足以 $g(x)$ 为特征多项式的线性齐次差分方程, 而(*)和(**)都是这个方程的特解的表达式. 由第三节定理 3, 特解表达式中出现的系数由初始条件唯一决定. 因而(*)中的任一项一定在(**)中出现, 换言之, 任一 z_i 一定是 $z_1', z_2', \cdots, z_d'$ 中的一个.

9. (1) 对多个变量的形式幂级数进行定义, 要注意不能简单地说"按升幂排列", 因为次数相同的单项式通常不止一个, 但它们至多只有有限多个. 我们可以规定形式幂级数的各项按次数从小到大排列, 而次数相同的项可以任意规定一个排列法则. 如

$$1+x+y+2xy+3x^2+5x^2y-xy^2+\cdots$$

这样便可以仿照一个变量的形式幂级数定义和与积, 而且加法与乘法仍满足交换律、结合律、分配律. 还可以定义商, 而且常数项非零的幂级数都可以作分母. 任何多项式都可以看作形式幂级数, 因而分母常数项不为零的有理式都可以展开成形式幂级数, 等等.

(2) 形式幂级数 $P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_n)$ 和 $P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_n)$ 都关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 对称. 即交换任意的两个变元 x_i 和 $x_j(i\neq j)$, 幂级数不会改变. 因此它们的 k 次项是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次对称多项式. 按照第十节例 8 之后的补充说明, 它们的 k 次项可以表示为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式. 因而这两个形式幂级数也可以表示为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的幂级数.

(3) 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}=(1+x_1+x_1^2+\cdots)\cdots(1+x_n+x_n^2+\cdots)\cdots$. 这个幂级数的 nm 次项正好是所有系数为 1 的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 nm 次单项式之和. 另一方面，还有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{1-\sigma_1+\sigma_2-\cdots+(-1)^n\sigma_n}$$
$$=1+[\sigma_1-\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_n]$$
$$+[\sigma_1-\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_n]^2+\cdots.$$

不难看出，这个展开式中只有$[\sigma_1-\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_n]^m$ 中有 σ_n^m 项，因此 σ_n^m 的系数为$(-1)^{(n-1)m}$. 令 $m=1$ 便可证得后一个结论.

习题十一解答

1. 由 $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$, $x_0=2$, $x_1=4$, 求出 $x_{11}=524174$, $x_{12}=1956244$. $\sqrt{3}$ 的近似值为 $\frac{x_{12}}{x_{11}}-2\approx1.732050808$.

2. 由迭代公式 $x_{n+1}=\frac{2x_n^3+4}{3x_n^2}$ 及 $x_1=1$, 可得到 $\sqrt[3]{4}$ 的近似值 $x_6\approx1.5874011$.

3. (1) 令 $\alpha_0=2$, $\beta_0=1$. 由于 $x_1=\frac{7}{4}$, 所以 $\alpha_1=7=2\alpha_0^2-1$, $\beta_1=4=2\alpha_0\beta_0$. 这就是说，对于 $n=1$ 命题成立.

假设 $n=k$ 时结论成立，即 $x_k=\frac{\alpha_k}{\beta_k}=\frac{2\alpha_{k-1}^2-1}{2\alpha_{k-1}\beta_{k-1}}$, 则由

$$x_k=\frac{x_{k-1}^2+3}{2x_{k-1}}=\frac{\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}\right)^2+3}{2\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}\right)}=\frac{\alpha_{k-1}^2+3\beta_{k-1}^2}{2\alpha_{k-1}\beta_{k-1}},$$

可知 $2\alpha_{k-1}^2-1=\alpha_{k-1}^2+3\beta_{k-1}^2$, 即 $\alpha_{k-1}^2-1=3\beta_{k-1}^2$. 于是，有

$$3\beta_k^2=3(2\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^2=3\beta_{k-1}^2\cdot4\alpha_{k-1}^2=2(\alpha_{k-1}^2-1)\cdot2\alpha_{k-1}^2$$
$$=(\alpha_k-1)(\alpha_k+1)=\alpha_k^2-1,$$

所以 $\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}=x_{k+1}=\frac{x_k^2+3}{2x_k}=\frac{\alpha_k^2+3\beta_k^2}{2\alpha_k\beta_k}=\frac{2\alpha_k^2-1}{2\alpha_k\beta_k}$. 由于 $2\alpha_k^2-1$ 与 α_k 互质，$2\alpha_k^2-1=6\beta_k^2+1$ 与 β_k 也互质，因此 $\frac{2\alpha_k^2-1}{2\alpha_k\beta_k}$ 是既约的. 这样，便有

$$\begin{cases}\alpha_{k+1}=2\alpha_k^2-1,\\ \beta_{k+1}=2\alpha_k\beta_k,\end{cases}$$

于是对于任意自然数 n 命题成立.

(2) 由佩尔方程*的有关性质,我们总可以找到非零整数 α_0, β_0, 使之满足 $\alpha_0^2-1=k\beta_0^2$. 再用类似于(1)的方法,可以证明由

$$\begin{cases}\alpha_n=2\alpha_{n-1}^2-1,\\ \beta_n=2\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\end{cases}$$

求得的 $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ 总是与由 $x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+k}{2x_{n-1}}$ 求得的 x_n 相等. 说明由 (1) 给出的差分方程组可以作求 $\sqrt{k}$ 近似值的公式.

5. 设 $f(x)=x^4-3x^3-x^2+6x-2$. 根据 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$的符号可知, 在区间$(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$内各有一个根, 其中在$(2, 3)$ 内的根是最大者, 也是绝对值最大者. 作差分方程 $x_n-3x_{n-1}-x_{n-2}+6x_{n-3}-2x_{n-4}=0$, 并令 $x_0=x_1=x_2=0$, $x_3=1$, 可求得 $x_9=527$, $x_{10}=1383$. 所以最大实根的近似值为 2.62.

6. 设(12.2)的特征根为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m. 则

$$x_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+\cdots+c_m\lambda_m^n,$$

其中 c_1, c_2, $\cdots$, c_m 为常数. 若 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$, 则结论已经成立. 否则不妨设其中不为零的是 c_1, c_2, $\cdots$, c_k, 于是有

$$x_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+\cdots+c_k\lambda_k^n.$$

我们来证明每个 $\lambda_l(l=1, 2, \cdots, k)$ 的相反数 $-\lambda_l$ 也是特征根, 且若 $\lambda_i=-\lambda_q$, 则 $|c_i|=|c_q|$.

设 λ_i 是绝对值最大的一个特征根. 若$|\lambda_i|>|\lambda_j|$ 对所有 $j\neq i$, $1\leqslant j\leqslant k$ 成立, 则存在正整数 t, 使 $|c_i\lambda_i^t|>(k-1)|c_j\lambda_j^t|$ $(1\leqslant j\leqslant k$ 且 $j\neq i)$. 这样, 对任意正整数 s, 有

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}c_j\lambda_j^{t+s}\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}|c_j\lambda_j^t|\cdot|\lambda_j^s|<|\lambda_i^s|\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}|c_j\lambda_j^t|<|c_i\lambda_i^t|\cdot|\lambda_i^s|$$
$$=|c_i\lambda_i^{t+s}|,$$

而$\left|\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}c_j\lambda_j^{t+s}\right|=|x_{t+s}-c_i\lambda_i^{t+s}|$, 可见 $x_{t+s}\neq0$. 由 s 的任意性可知, $\{x_n\}$ 中仅有前 t 项有可能为零, 与已知条件矛盾. 这就是说, 必存在一个与 λ_i 绝对值相同的特征根, 它只能是$-\lambda_i$. 将 $-\lambda_i$ 记作 λ_q, 则 $c_i\lambda_i^n+c_q\lambda_q^n=$

---

* 参看参考文献[5].

$[c_i+c_q(-1)^n]\lambda_i^n$，若 c_i+c_q 与 c_i-c_q 均不为零，令 $c=\min(|c_i+c_q|, |c_i-c_q|)$. 不难用类似于上面的方法证明存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i, j\neq q}}^{k} c_j\lambda_j^n\right|<|c\lambda_i^n|$，因而对所有 $n>N$ 有 $x_n\neq 0$。于是 $c_i=\pm c_q$。若 c_i+c_q（或 c_i-c_q）不为零，则 $\{x_n\}$ 中只有有限多个偶数项（奇数项）不为零，因此必有无限多个奇数项（偶数项）为零。若从 x_n 的表达式中去掉 $c_i\lambda_i^n$ 和 $c_q\lambda_q^n$ 两项，则余下的和式仍对无穷多个奇数（偶数）n 为零。对 k 用归纳法，可知 x_n 对所有奇数（偶数）n 为零。

7. 当特征根绝对值都小于 1 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

8. m 与 $\sqrt{k}$ 越接近，精度提高得越快。

9. 提示：用数学归纳法。

习题十二解答

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=(a_1a_2^2a_3^3\cdots a_k^k)^{\frac{2}{k(k+1)}}$。

5. $P_k^0=\dfrac{N-k}{N}$，$P_k^N=\dfrac{k}{N}$.

6. 答案与例 3 相同。

7. 设 $\lambda=4\sin^2\dfrac{\pi}{2(n+1)}$。我们来计算 A_n 的相应于 λ 的特征向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。不妨设 $x_1=1$。将 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)A_n=\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 按分量写出来就得到 $2x_1-x_2=\lambda x_1$，$-x_1+2x_2-x_3=\lambda x_2$，$\cdots$，$-x_{k-2}+2x_{k-1}-x_k=\lambda x_{k-1}$，$\cdots$，$-x_{n-1}+2x_n=\lambda x_n$。除第一和最后一个方程外，我们得到一个差分方程 $x_k=(2-\lambda)x_{k-1}-x_{k-2}$，而第一个方程给出初始条件 $x_2=2-\lambda$（注意 $x_1=1$）。注意这个差分方程和初始条件与(13.17)差不多，若令 $x=\lambda$，易见 $x_k=f_{k-1}(\lambda)\cdot(-1)^{k-1}$。化简得

$$x_k=\frac{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}\quad(1<k\leqslant n).$$

由此可知，范墉不等式等号成立的充分必要条件是

$$x_1:x_2:\cdots:x_n=\sin\frac{\pi}{n+1}:\sin\frac{2\pi}{n+1}:\cdots:\sin\frac{n\pi}{n+1}.$$

上面的过程实际上也给出了计算 A_n 的特征值的另一个方法。